UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POST GRADO

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

COOPERACIÓN UNIVERSITARIA ESPAÑOLA

(Convenio UNSAAC-CUES)

INTERFERENCIAS EN LA COMPRENSIÓN DE LOS SIGNIFICADOS DEL NÚMERO RACIONAL

Tesis presentado por el Bachiller Wenceslao Quispe Yapo, para optar el grado académico de Magíster en Enseñanza de la Matemática

Asesor: Dr. Jesús Gallardo Romero

CUSCO – PERÚ

2008

“El temor de Jehová es el principio de la sabiduría,
y el conocimientos del Santísimo es la inteligencia.”
Prov. 9:10

Sabiduría ante todo; adquiere sabiduría;
y sobre todas tus posesiones
adquiere inteligencia.”
Prov. 4:7

A mi madre, que es la fuente de mi vida.
A Alejandrina, Arturo y Jacqueline, que
me regalaron su comprensión y paciencia.
A mis hermanos, por su aliento y afecto.

Wenceslao

AGRADECIMIENTOS

La insuficiencia del espacio es corto e imposibilita expresar, aquí, mi agradecimiento a todas las personas que, directa o indirectamente, con sugerencias sobre el tema de investigación y con su apoyo moral, han hecho posible la realización y culminación de este documento. Aún cuando este trabajo tenga mi autoría, bien sé que es obra de una colectividad y deseo expresar mi más sincero agradecimiento a las siguientes personas:

En primera instancia al Dr. Jesús Gallardo Romero, Asesor de esta tesis, quien no solo me infundió ánimo sino que con proverbial paciencia orientó la realización de este trabajo de investigación, y sin cuyos consejos académicos este informe no se hubiera concretado.

Al Ex Rector Mgt. Mario Góngora Santa Cruz, al Presidente del Comité de Cooperación Universitaria Española Dr. Jorge Rodríguez-Piñero Fernández y la Mgt. Gabrielle Frisch d'Adhemar, quienes en 1997 organizaron la Maestría en la Enseñanza de la Matemática, el cual se constituyó en un espacio académico de renovación pedagógica.

A todos los investigadores de la educación matemática que de forma directa o indirecta aportaron sus ideas para nutrir este estudio. Con el temor de olvidar algunos de ellos me atrevo a mencionarlos: a Luis Puig, Rafael Escolano, Alicia Ruiz y Adela Salvador quienes amablemente me facilitaron diversa documentación científica.

Y, finalmente, mi más sincero agradecimiento a cada uno de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno, quienes desinteresadamente cooperaron con este estudio aportando información sobre su comprensión del número racional.

Wenceslao Quispe Yapo

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es evaluar la comprensión de los significados del número racional positivo en su representación fraccional de los estudiantes de Educación Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno-Perú. El trabajo tiene por finalidad identificar aspectos del concepto de fracción, relativo a los significados parte-todo, medida, razón, cociente y operador. Otro objetivo de esta investigación fue analizar libros de texto, de enseñanza escolar, a la luz de la teoría de los registros de representación de R. Duval, procuramos evaluar en que medida los diversos registros del número racional son presentados en la introducción del concepto de número racional, en sus diferentes significados. Deseamos investigar como son trabajadas las transformaciones al interior de un mismo registro y las traducciones de un registro a otro. Para eso, se busca responder la siguiente interrogante de investigación: ¿Cuál es la naturaleza de la comprensión de los significados del número racional positivo en su representación fraccional?

El estudio está fundamentado en el Análisis Didáctico de cuatro aspectos: primero, aprendizaje y cognición, segundo, enseñanza y currículum, tercero, fenomenología y cuarto, epistemología, este trabajo de investiga establece la relación entre la comprensión, representaciones matemáticas y los desenvolvimientos cognitivos del sujeto. Tanto la elaboración del instrumento, tanto el análisis de los datos y la conclusión del estudio están basados en la teoría sobre comprensión de J. Gallardo (2004), fenomenología de H. Freudenthal, epistemología, teoría sobre registros de representación de R. Duval y en la teoría antropológica de Y. Chevallard.

Desde el punto de vista metodológico el estudio es descriptivo-exploratorio, sustentado en el análisis cuantitativo y cualitativo de los datos con la elaboración de un instrumento compuesto de seis cuestiones que involucran el concepto de fracción en sus seis significados. Los estudiantes responden a las cuestiones, utilizando los diferentes sistemas de representación: pictóricos, lenguaje natural escrito, lenguaje simbólico. El estudio empírico fue realizado con un grupo de sesenta estudiantes de tercero, cuarto y quinto nivel de estudios de formación docente. Los resultados

fueron analizados, observándose el desempeño y las estrategias utilizadas por los alumnos, cuando resuelven las cuestiones propuestas. Algunas concepciones usadas por los alumnos fueron identificadas como interferencias entre significados, conforme a situaciones contextuales y el significado utilizados en las resoluciones de situaciones problemáticas además, diagnóstica el comportamiento operatorio del estudiante, quienes demostraron poseer la concepción parte todo, como central en la resolución de los problemas.

El análisis de los resultados obtenidos de las repuestas de los estudiantes apuntas diferencias entre los sistemas de representación, en favor del sistema simbólico numérico. Sin embargo, se observa que a pesar de la evolución en el desempeño de los estudiantes, estas presentan el fenómeno de la interferencia entre significados del número racional. También, pudimos constatar que, los libros privilegian los registro numérico y los realizados en el registro gráfico figural. Los resultados obtenidos fueron considerados sobre los puntos de vista cuantitativo y cualitativo, constatándose que, los alumnos aun presentan dificultades significativas sobre tres puntos de vista: la comprensión de los significados, tratamiento de los registros de representación y de aspectos más abstractos de construcción de los números racionales.

RESUMO

O objetivo desta dissertação é evaliar a compreensão dos significados do número racional positivo em sua representação fraccional dos estudantes de educação matemática da Faculdade de Ciencias da Educação da "Universidad Nacional del Altiplano de Puno". O trabalho tem por finalidade identificar aspectos do conceito de fração, relativos aos significados parte-todo, medida, ração, quociente y operador. Outro objetivo desta pesquisa foi analisar livros de texto, do ensino, à luz da teoria dos registros de representação de R. Duval, procurou avaliar em que medida os diversos registros do número racional eram aprensentados na introdução do conceito do número racional, em seus diferentes significados. Desejamos investigar como eram trabalhados as transformações no interior de um mesmo registro e as transformações de um registro para outro. Para isso, busca-se a reposta para a seguinte questão de Pesquisa: ¿Qual é a naturaleza da compreensão dos significados do número racional positivo em sua representação fraccional?. O estudo esta fundamentado num Análise Didáctico de quatro aspectos: primeiro, aprendizagem e cognição, segundo, ensino e curriculum, terceiro, fenomelogía e quarto a epistemología, este trabalho investiga a relação entre a compreensão, as representaçãos e o desenvolvimento cognitivo do sujeito. Tanto a elaboração do instrumento diagnóstico, quanto a análise dos dados e a conlusão do estudo estiveram baseados na teoria da compreensão de Gallardo, fenomenologia de Freudenthal, epistemologia, teoría de registros de representação de Duval y na teoria antropológica do didatico de Chevallard.

A metodología constou de um estudo descritivo-exploratorio, por meio da análise quantitativa e qualitativa dos dados com a elaboração do instrumento composto de seis questões envolvendo o conceito de fração nos seis significados. Os estudantes responderam às questões, utilizando-se dos diferentes sistemas de representação: pictóricas, linguagem natural escrito, linguagem simbólica. O estudo empírico foi realizado com um grupo de sessenta estudantes de terceiro, quarto e quinto nivel de estudo de formação docente. Os resultados foram analisados, observando-se o desempenho e as estratégias utilizadas pelos alunos, quando resolveram as questões propostas. Algunas concepcões usadas pelos alunos foram identificadas como interfêrencias entre significados, conforme a situacão e o significado abordado na resolução de situações-problema e diagnóstica o comportamento operatório do estudante, quienes demostraram possuir a concepção parte-todo, como central pra resolução dos problemas.

Análise dos resultados obtidos das respostas do etudiantes apontou diferenças entre os sistemas de representação, em favor do sistema simbolico. Embora da análise, observou-se que apesar da evolução no desempenho dos estudantes, esta presenta o fenomeno de interferência entre significados do número racional. Pode-se constatar que os livros privilegiam os registro numéricos em frente a outros como os registros figuirais. Os resultados obtidos foram considerados sobre os pontos de vista quantitativo e qualitativo, constatando-se que, os alunos ainda apressentam dificuldades significativas três aspectos: da compreensão dos significados, tratamentos dos registros de representação e de aspectos mais abstratos da construção dos números racionais.

ÍNDICE

Agradecimientos iii
Resumen iv
Resumo vi

CAPÍTULO I

EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Introducción. 1
1.2 Origen y Racionalidad. 2
1.3 Descripción del Problema de Investigación. 4
1.4 Formulación del Problema. 7
1.4.1 Problema General. 8
1.4.1.1 Problemática específica. 8
1.4.2 Objetivo General. 9
1.4.2.1 Objetivos específicos. 9
1.4.3 Hipótesis General. 9
1.4.3.1 Hipótesis específicas. 10
1.5 Justificación. 11
1.6 Limitaciones de la Investigación. 13

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Introducción. 14

2.2 Ámbitos de Análisis y Exposición de Contenidos. 15

2.3 Cognición, Aprendizaje y Comprensión del Número Racional. 16

2.3.1 Comprensión en Matemáticas. 16

2.3.1.1 Dimensiones de la comprensión en matemáticas. 17

2.3.1.2 Relación con otras nociones cognitivas. 19

2.3.1.3 Valoración y comprensión. 20

2.3.1.4 Contribuciones de las aproximaciones. 21

2.3.1.5 Fronteras en la investigación sobre comprensión en matemáticas. 22

2.3.2 Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje. 24

2.3.2.1 Dificultades, obstáculos epistemológicos y errores. 25

2.3.3 Aprendizaje y Comprensión del Número Racional. 26

2.3.3.1 Aprendizaje de las fracciones y sus diferentes significados. 26

2.3.3.2 Concepciones sobre fracciones de alumnos después de los estudios formales. 27

2.3.3.3 Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto de Humberto Jaime de León Pérez. 29

2.4 Currículum y Enseñanza del Número Racional. 31

2.4.1 Consideraciones de la enseñanza de la matemática. 32

2.4.1.1 La instrucción que construimos. 32

2.4.1.2 La transposición didáctica. 33

2.4.1.3 Las nociones matemáticas, paramatemáticas y protomatemáticas. 34

2.4.1.4 Los saberes escolarizados su preparación didáctica. 35

2.4.2 Enseñanza del Número Racional. 36

2.4.2.1 Creencias, concepciones y competencias de los profesores sobre las fracciones. 36

2.4.2.2 Modelo de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. 38

2.4.2.3 Enseñanza del numero racional positivo en educación primaria. 40
2.4.2.4 El concepto de fracción en sus diferentes significados. 41
2.4.2.5 La fracción en la perspectiva del profesor de aula. 43
2.4.2.6 Representaciones del número racional en la formación de profesores. 44
2.4.2.7 Aprender a enseñar, representación del número racional. 45
2.4.2.8 Sistemas de representación de números racionales positivos. 48
2.4.2.9 Profesores y sus saberes de números fraccionarios. 49
2.4.3 El Número Racional en el Currículum Peruano. 51
2.4.3.1 Los estándares curriculares para el aprendizaje enseñanza de los números racionales. 51
2.4.3.2 Disposiciones curriculares oficiales del Sistema Educativo Peruano. 53
2.4.4 Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. 55
2.4.5 Manuales de Difusión de la Matemática. 56
2.5 Fenomenología del Número Racional. 57
2.5.1 Análisis Fenomenológico del Conocimiento Matemático. 57
2.5.1.1 El método de Hans Freudenthal. 58
2.5.1.2 Análisis fenomenológico en la visión de Luis Puig. 60
2.5.1.3 La visión fenomenológica en Gallardo (2004). 64
2.5.2 Claves fenomenológicas del Número Racional. 64
2.5.2.1 Fenomenología del número racional según Freudenthal. 64
2.5.3 Historia de la Fracciones. 65
2.5.3.1 Los babilónicos y la noción de fracción. 66
2.5.3.2 Las fracciones en el antiguo Egipto. 67
2.5.3.3 Las fracciones en la cultura China. 68
2.5.3.4 Las fracciones en la cultura Griega. 69
2.5.3.5 Las fracciones en el mundo Árabe, el caso de Al-Kashi. 69
2.5.3.6 El Liber Abaci de Leonardo de Pisa. 70
2.5.3.7 François Viète en la Europa Occidental. 70
2.5.3.8 Simón Stevin y la popularización de las fracciones decimales. 70
2.5.3.9 La organización de los pueblos a partir del S. XVI. 71
2.5.4 Conocimiento Académico del Número Racional. 71
2.5.4.1 Introducción de los números racionales. 71

2.5.4.2 Los números racionales como campo. 71

2.6 Componentes Epistemológicos del Número Racional. 73

2.6.1 Significados del Número Racional. 74

2.6.1.1 Concepto, significado, signo. 74

2.6.1.2 Aproximación conceptual al término “Fracción”. 75

2.6.1.3 Contexto y significados del número racional. 76

2.6.2 Los Significados de la Fracciones en la Educación Secundaria. 77

2.6.2.1 Significados del número racional en su representación fraccional. 78

2.6.2.2 Los Significados de la fracciones en Castro, E. y Torralbo, M. 82

2.6.2.3 Significados institucionales y personales de las fracciones 83

2.6.3 Representaciones Matemáticas. 84

2.6.3.1 Semántica del término representación. 84

2.6.3.2 Primeras aproximaciones a los sistemas de representación. 86

2.6.3.3 Raymond Duval: Sistemas de registros de representación. 87

2.6.3.4 Orientaciones metodológicas de Duval. 91

2.6.3.5 Los registros de representación en el análisis de textos. 91

2.6.3.6 Visualización. 93

2.6.3.7 Representación simbólica en educación matemática. 95

2.6.3.8 Teoría para desarrollar competencias con símbolos matemáticos. 97

2.6.4 Representaciones del Número Racional. 98

2.6.4.1 Representaciones simbólicas del número racional. 100

2.6.4.2. Representaciones visuales o figurativo. 101

2.6.4.3 Representación del número racional en los libros de texto. 103

2.6.4.4 Presencia histórica de la fracción en los libros de texto. 105

2.7 Resultados Secundarios y Consecuencias para la Investigación 106

2.7.1 Resultados Secundarios. 106

2.7.2 Consecuencias para la Investigación. 110

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Introducción. 113
3.2 Lineamientos Metodológicos de la Investigación. 114
3.3 Metodología de la Fase Teórica. 117
3.3.1 Ámbitos del Estudio Teórico. 117
3.3.2 Consideraciones Generales sobre el Análisis Didáctico. 118
3.3.3 Aplicación del Análisis Didáctico en la Investigación. 121
3.3.3.1 Acceso al conocimiento. 121
3.3.3.2 Método de revisión de documentos. 123
3.3.3.3 Limitaciones. 124
3.4 Metodología de la Fase Empírica. 125
3.4.1 Estudio Descriptivo Evaluativo. 125
3.4.1.1 Nivel y Tipo de Investigación. 126
3.4.2 Población y Muestra de Estudio. 127
3.4.3 Procedimiento de Recolección de Datos. 128
3.4.3.1 Descripción y análisis del instrumento de recolección de datos. 128
3.4.3.2 Proceso de elaboración del instrumento de evaluación. 129
3.4.3.3 Descripción del instrumento de evaluación. 131
3.4.4 Análisis de datos. 134
3.4.4.1 Presentación cuantitativa de resultados. 135
3.4.4.2 Análisis cualitativo de resultados. 136

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE SIGNIFICADOS EN LIBROS DE TEXTO

4.1 Introducción. 137
4.2 Propósitos del Estudio. 139
4.3 Elementos de Análisis. 140

4.3.1 Muestra de Libros de Textos. 141
4.3.2 Instrumentos de Recolección de Datos. 144
4.3.2.1.Dimensiones o variables de estudio. 144
4.3.2.2 Estructura y contenido del instrumento de análisis. 145
4.4 Significados en la Conceptualización del Número Racional en los Libros de Texto de Matemática. 147
4.4.1 Exposición de Resultados. 147
4.4.2 Los Significados en la Construcción del Concepto de Número Racional. 148
4.4.2.1 Periodo A: Matemática Tradicional. 148
4.4.2.2 Periodo B : Orientación conductista en la Matemática Moderna. 152
4.4.2.3 Periodo C: Introducción del Constructivismo. 164
4.4.3 Actividades Cognitivas Asociadas a la Representación de los Significados. 176
4.4.3.1 Durante el periodo de la enseñanza tradicional. 176
4.4.3.2 Durante el periodo de la Matemática Moderna. 179
4.4.3.3 Durante el periodo de introducción del constructivismo. 181
4.4.4 Ilustraciones en la Construcción del Número Racional. 182
4.4.4.1 Identificación de los tipos de gráficos. 183
4.4.5 La Fenomenología del Estudio de los Números Racionales. 189
4.4.5.1 Presencia de elementos históricos en el estudio de los significados. 189
4.4.5.2 Los números racionales en la vida cotidiana. 191
4.4.6 Elementos Metodológicos en los Libros de Texto. 193
4.4.6.1 Periodo A. 193
4.4.6.2 Periodo B. 193
4.4.6.3 Periodo C. 195
4.5 Configuraciones Epistémicas del Número Racional en los Libros de Texto. 196
4.5.1 Configuración Epistémico Formalista del Enfoque Conductista de la “Matemática Moderna” Asociada al Significado del Número Racional. 197
4.5.2 Configuración Epistémico Empirista del Enfoque “Introducción del Constructivismo” Asociada al Significado del Número Racional. 199

CAPÍTULO V

EXPLORACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS DEL NÚMERO RACIONAL

5.1 Introducción. 202

5.2 Propósitos del Estudio. 202

5.3 Características de la Exploración. 202

5.3.1 Tareas. 202

5.3.2 Fenómenos de Estudio. 205

5.3.3 Análisis e Interpretación de las Respuestas. 205

5.3.3.1 Categorías. 206

5.3.3.2. Clasificación de registros de representación. 208

5.3.3.3 Respuestas de la muestra. 209

5.4 Diferencias Relativas a los Significados del Número Racional. 213

5.4.1 Interpretación Cuantitativa de los Significados del Número Racional. 213

5.4.1.1 Empleo propio correcto en la interpretación del significado. 213

5.4.1.2 Orden en la interpretación de los significados del número racional. 218

5.4.1.3 Grado de interpretación los significados del número racional. 222

5.4.2 Caracterización Cualitativa de los Significados. 225

5.4.2.1 El significado de fracción como “parte todo” continuo. 225

5.4.2.2 La fracción en su acepción parte todo discreto. 227

5.4.2.3 La fracción en su significado cociente de enteros. 229

5.4.2.4 Fracciones como medida. 230

5.4.2.5 La fracción en su significado de razón. 232

5.4.2.6 La fracción como operador. 234

5.5 Representaciones en los Significados del Número Racional. 236

5.5.1 Análisis Cuantitativo de los Sistemas de Representación. 236

5.5.1.1 Significado parte-todo continuo y sus representaciones. 238

5.5.1.2. Significado parte-todo discreto y sus representaciones. 238

5.5.1.3 Significado cociente y sus representaciones. 239

5.5.1.4 Significado de medida y sus representaciones. 239

5.5.1.5. Significado de razón y sus representaciones. 240

5.5.1.6 Significado operador y sus representaciones. 240
5.5.2 Actividades Cognitivas Relacionadas a las Representaciones. 241
5.5.2.1 Las representaciones en la comprensión del significado parte todo continuo. 241
5.5.2.2 Las representaciones del significado parte-todo discreto. 242
5.5.2.3 Las representaciones del significado cociente. 243
5.5.2.4 Las representaciones del significado de medida. 245
5.5.2.5 Las representaciones del significado de razón. 246
5.5.2.6 Las representaciones del significado de operado. 249
5.6 Fenómeno de la Interferencia Endógena de Significados del Número Racional. 250
5.6.1 Perspectiva Cuantitativa de las Interferencias entre Significados. 251
5.6.2 Interferencia Interna: Naturaleza de los Vínculos Fenómeno-Epistemológicos de la Fracción. 252
5.6.2.1 Interferencia del significado <<cociente en parte-todo continuo>>. 255
5.6.2.2 Interferencia del significado <<razón en parte-todo discreto>>. 256
5.6.2.3 Interferencia del significado <<parte-todo continuo en cociente>>. 256
5.6.2.4 Interferencias en el significado medida. 257
5.6.2.5 Interferencia del significado <<parte-todo en razón>>. 259
5.6.2.6. Interferencia del significado <<parte-todo continuo en operador>>. 261
5.7 Interferencia Externa: Extensión de los Conjuntos Personales de Situaciones Asociados a la Fracción. 263

CONCLUSIONES

1 Introducción. 266
2 Conclusiones. 267
3 Sugerencias. 277
4 Perspectivas Futuras de Investigaciones. 279
Referencias Bibliográficas. 281

ANEXOS

Anexo I. Formulación del Problema e Instrumento de Recolección de Datos. 295
Anexo II. Información Adicional Sobre el Análisis de Libros de Texto. 298
Anexo III. Protocolos de Solución a las Situaciones Problema de la Prueba sobre Comprensión de los Significados del Número Racional. 303
Anexo IV. Interpretación de Resultados. 370

CAPÍTULO I

EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 INTRODUCCIÓN

Esta investigación sobre las “Interferencias en la Comprensión de los Significados del Número Racional”, el caso de los estudiantes de formación pedagógica de la Especialidad de Matemática y Computación de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno, fue realizado dentro de Programa de Maestría Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Post Grado de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco en convenio con la institución Cooperación Universitaria Española CUES. Como corresponde, al inicio de la investigación, en este capítulo se exponen el origen y racionalidad del problema de investigación que se concreta en la formulación de las interrogantes, además de la declaración de objetivos e hipótesis, justificación e importancia del estudio así como su pertinencia y viabilidad. Como es normal en un estudio de este nivel en el proceso se encuentran limitaciones que quedan explicitadas en el presente capítulo.

La tesis, parte del supuesto que los planteamientos teóricos sobre temas de comprensión y representación del conocimiento matemático y sus consecuencias teóricas han de contribuir a la solución de problemas de aprendizaje de la matemática en general y, específicamente, el pensamiento numérico en la educación básica.

1.2 ORIGEN Y RACIONALIDAD

A lo largo de las últimas décadas, diversos estudios realizados a nivel internacional han venido indicando el bajo nivel educativo en el país, concretamente, en el ámbito del aprendizaje de la matemática. Así por ejemplo, los resultados del estudio internacional comparativo de la UNESCO sobre lenguaje y matemática y factores asociados en tercer y cuarto grado de primaria, muestran que el Perú ocupa el último lugar en matemática, según el informe realizado por el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) 1998. Igualmente, la Unidad de Medición de la Calidad Educativa del Ministerio de Educación, concluye en el informe pedagógico "Cómo rinden los estudiantes peruanos en comunicación, matemática, resultados de la Evaluación Nacional 2001, sexto grado de primaria" que "Muy pocos alumnos alcanzan el Nivel Suficiente, fluctuando entre más o menos el 5% y el 9% en cualquiera de las tres competencias, es decir que solo una parte muy pequeña de los estudiantes presenta un rendimiento aceptable en el área de matemática." (p.47), además la mayoría de estudiantes presentan limitaciones para representar cantidades y operar con fracciones (homogéneas) y expresiones decimales. Más recientemente la Unidad de Medición de la Calidad Educativa en el año 2004 en su informe concluye lo siguiente:

> El 6,0% de los estudiantes de tercer grado de secundaria se ubica en el nivel suficiente. Esto significa que solo este pequeño porcentaje muestra un desarrollo de sus capacidades matemáticas aceptable para el grado. Lo preocupante de estos resultados radica en que el resto de estudiantes (94,0%) muestra no haber

desarrollado adecuadamente las habilidades matemáticas requeridas para el grado que están culminando. Esto implica que un gran porcentaje de los estudiantes no ha logrado incorporar importantes nociones matemáticas ni desarrollar esenciales habilidades necesarias para enfrentarse con éxito a diversas situaciones problemáticas tanto dentro como fuera de la escuela. (p. 219)

Estos resultados desfavorables exigen respuestas urgentemente a ciertas interrogantes que expliquen esta deficiencia en el aprendizaje matemático con relativa rigurosidad científica.

Dejando al margen, dimensiones sobre la validez real y pertinencia práctica de estos estudios comparativos, lo cierto es que estos resultados constituyen un indicador de la necesidad de realizar esfuerzos más intensos y sistemáticos, que los hasta ahora desplegados, destinados a mejorar la enseñanza de la matemática en el país.

Ante este problema, resulta imprescindible la investigación destinada a profundizar en la naturaleza de las dificultades de aprendizaje existentes, además de caracterizar los detalles y las limitaciones en la educación matemática. Nos referimos a una vía de actuación (un enfoque, una nueva perspectiva) fundada en la convicción de que conocer los resultados negativos no son suficientes por sí mismos para, a partir de ellos, establecer líneas de acción y realizar las reformas necesarias. Por cierto, es necesario posicionar y caracterizar con detalle los distintos problemas de aprendizaje de la matemática pues la complejidad del conocimiento matemático y su enseñanza así lo exigen.

En este sentido la presente investigación constituye un aporte para entender las razones del deficiente aprendizaje de las fracciones. Apoyado en un marco teórico sobre la comprensión, sistemas semióticos de representación y un marco metodológico sustentado en el análisis didáctico se realizó el estudio de las interferencias en la comprensión de los significados del número racional en su representación fraccional.

1.3 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La enseñanza aprendizaje de la matemática fue una preocupación permanente durante el siglo XX, un notable estudioso de la educación peruana, José Antonio Encinas, objetaba la enseñanza libresca y carente de principios didácticos. Encinas (1928) en su obra *"Un Ensayo de Escuela Nueva en el Perú"* criticó la:

> ...clásica y artificial división de las operaciones de cálculo en enteros, quebrados y decimales; las tablas de sumar, restar, multiplicar y dividir; las definiciones redactadas en forma ininteligible, los ejemplos expuestos con ambigüedad, todas con una macabra procesión de números que los niños debían retener en la cabeza. (p.116).

El pedagogo en mención planteó la enseñanza de la matemática "mediante problemas escogidos en relación a su capacidad y a sus necesidades, calculando con todas las operaciones" (p. 116), por ejemplo, proponía que la enseñanza de las fracciones parte de los conocimientos que el niño tiene como producto de su experiencia en la vida diaria, cuando habitualmente usa fracciones de la unidad. Recomendó que, si se tenía que enseñar a sumar no se debe proceder en forma abstracta y aislada de la realidad cotidiana del niño, sino, en la resolución de problemas, graduados convenientemente, buscando que el niño discipline su inteligencia haciendo que la enseñanza de la matemática sea más útil, amena, y sobre todo, comprensiva (Encinas, 1928).

Como constatamos, la preocupación por la educación matemática en general y específicamente la enseñanza aprendizaje de las fracciones, fue y sigue siendo una constante. La manera de abordar la enseñanza de las fracciones tiene deficiencias conceptuales y metodológicas, esto quedó evidente en la revisión de los textos escolares de matemática. El manejo casi exclusivo del concepto "parte-todo" de las fracciones, se traduce en un deficiente aprendizaje comprensivo de los números racionales positivos. En la resolución y planteo de problemas predomina casi exclusivamente las representaciones simbólicas, descuidando otras representaciones del número racional.

La organización de la enseñanza de los números racionales, basado casi exclusivamente, en el significado parte-todo y el olvido negligente de la enseñanza de los demás significados como: medida, razón, cociente y operador, trajo como consecuencia resultados insuficientes en la comprensión de la noción de número racional. Este aprendizaje deficiente se traduce en las dificultades que tiene el estudiante al momento de utilizar este conocimiento en el aprendizaje de otros contenidos que tienen relación con él. Se ha observado, en la labor docente, que en el aprendizaje de las proporciones, razones, fracciones parciales, fracciones algebraicas, funciones trigonométricas, probabilidad, funciones exponenciales y otras los alumnos tienen dificultades, porque carecen de un sólido aprendizaje comprensivo de los números racionales como par ordenado. Si no se atienden estos problemas de aprendizaje, es altamente probable que el alumno los sopesará durante sus estudios superiores.

Algo que nos sorprende es encontrar personas adultas que olvidan con frecuencia el algoritmo de la suma de fracciones heterogéneas, o no pueden explicar por qué razón tienen que calcular el mínimo común múltiplo para sumar. Nos atrevemos a afirmar que esta dificultad se debe a que el aprendizaje de los algoritmos matemáticos se basan en la repetición y memorización mecánica. Razón por la que no han sido asimilados de forma racional. Estas deficiencias quizás se deban a un aprendizaje mecánico (*rote learning*), donde se ejerce la memoria sin preocuparse por comprender el significado de los procesos algorítmicos, ni desarrollar una comprensión adecuada del concepto de fracción.

Es probable que estas personas no hayan tenido la necesidad de utilizar las fracciones en mucho tiempo o tengan oportunidades escasas de manipular fracciones de cierta complejidad, limitando sus necesidades cotidianas a utilizar situaciones del tipo: medio litro de leche, varillas de fierro de 3/8, 1/8 de galón de pintura, ¼ de pollo, diez céntimos de Nuevo Sol. Como sea, las fracciones están presente en la vida diaria y son necesarias para ejercer su ciudadanía plenamente; así en el *Informe Cockcroft Las matemáticas sí cuentan,* recomiendan Cockcroft et al. (1985) que: “Los alumnos deben ser capaces de realizar cálculos que incluyan la palabra “de”, tales como 1/3 de 4,50 libras: Sumar y restar fracciones con denominadores 2, 4, 8 ó 16 en el contexto de la medida” (p.167). De allí surge la necesidad de comprender la naturaleza de los números racionales positivos, el cómo se la conceptúa y cuáles son sus significados.

En el informe pedagógico de los resultados de la Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004 (ENRE 2004) del tercero y quinto grados de educación secundaria, elaborado por la Unidad de Medición de la Calidad, en una muestra de 640 instituciones educativas de educación secundaria de todas las regiones del Perú, donde se evaluaron alrededor de 14 500 estudiantes en cada grado. Se encontró que el 74.1% de los estudiantes de tercer grado no han incorporado el manejo de las propiedades y operaciones aritméticas en los diversos conjuntos numéricos (N, Z, Q, R).

El informe en referencia (ENRE 2004) “ha encontrado que los estudiantes de quinto grado presentaron dificultades en el manejo de las nociones de número en el conjunto de los racionales” (p. 179) lo que evidencia que tienen dificultades en la comprensión de los números racionales y sus operaciones aritméticas básicas; así mismo, en la interpretación y recodificación en sus diversas representaciones (decimal, fraccionaria, simbólica, porcentual, gráfica, etc.), no tienen incorporadas las nociones de número (entero, racional, real) y no realizan conexiones entre estos conjuntos numéricos.

Una de las posibles causas que explican el problema que sugiere el informe es que los estudiantes no comprenden el concepto de número, sus representaciones y propiedades, además de los algoritmos de las operaciones aritméticas básicas de los diferentes conjuntos numéricos (N, Z, Q y R).

La explicación a las deficiencias anteriores, que proponen los especialistas, es la falta de significatividad para los estudiantes de las actividades matemáticas, la compartimentalización del conocimiento matemático y la baja demanda cognitiva de las actividades propuestas. Así, los números racionales positivos, en su representación fraccional, son estudiados como un tema desconectado de los demás sistemas numéricos, sin relacionarlos con otros tópicos de la matemática escolar; además, los problemas de los números racionales son presentados aislados de su fenomenología, divorciados de las situaciones problemáticas de la vida real. Por otra parte, la resolución de problemas se organizan en estrategias de memorización, mimética, de ejemplificación de «problemas tipo» del profesor.

Consideramos que las sugerencias propuestas por el ENRE 2004, pueden servir al docente para reflexionar sobre su práctica y buscar mejores estrategias para promover aprendizaje comprensivo. Su propuesta se centra en que se debe trabajar con los números racionales positivos, estudiar sus propiedades de equivalencia, orden y densidad en sus diferentes representaciones simbólicas y gráficas; así también, la representación fraccional se debe interpretar en sus diferentes significados como: fracción en sí (parte-todo), como cociente entre dos números, como razón y como operador.

En conclusión, se encontró que las evaluaciones nacionales e internacionales demuestran las limitaciones de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en general, específicamente de los números racionales, esto justifica a plenitud la necesidad de abordar la problemática que se formula en el siguiente bloque.

1.4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La enseñanza y aprendizaje del número racional positivo, en su representación fraccional, en el nivel de educación secundaria, se caracteriza por su marcado énfasis en el cálculo y resolución de ejercicios de aplicación de algoritmos explicados, por el profesor, donde el alumno imita la demostración previa del docente, utilizando casi exclusivamente el significado parte-todo en su representación simbólica-numérica, por ejemplo: ($\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \times 5 + 3 \times 4}{3 \times 5}$). El enfoque tradicional de la enseñanza del número racional, se traduce en la utilización exclusiva de la representación simbólica numérica, al momento de abordar su enseñanza en el nivel secundario. Este enfoque es un problema latente del trabajo en el aula, por lo que se hace urgente la necesidad de estudiar otros sistemas de representación, como las gráficas en la recta numérica, el sistema de ejes coordenados o representaciones pictóricas y evaluar sus implicancias en la comprensión de los significados de las fracciones como medida, razón, cociente y operador, así como, las interferencias entre las diferentes interpretaciones o, concretamente, la interferencia del significado parte-todo en las demás acepciones. Este fenómeno es el núcleo de esta investigación.

El problema de investigación pretende responder a cuestiones referentes a la comprensión de los significados del número racional positivo, sus interferencias, utilización de diferentes sistemas de representación y analizar sus interacciones entre estos, a través de la observación del desempeño de los estudiantes que reciben formación profesional de educación matemática. El campo problemático del objeto matemático se delimita a los números racionales positivos, representados en forma de números fraccionales, lo que implica que no hemos investigado cuestiones relativas a su representación decimal.

La interrogante general es la siguiente:

1.4.1 Problema General

¿Cuál es la naturaleza de la comprensión de los significados del número racional positivo, en su representación fraccional, que revelan los estudiantes que reciben formación profesional de educación matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación, de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno-Perú?

La absolución de esta interrogante aspira contribuir al entendimiento del fenómeno de la comprensión del número racional que manifiestan los estudiantes a través de sus significados e interferencias y sus representaciones externas. La dilucidación de la interrogante general se da a través de las siguientes cuestiones especificas.

1.4.1.1 Problemática específica

Concentrados en el diagnóstico evaluativo de los significados del número racional manejada por los estudiantes de formación magisterial, el estudio se ocupa de las siguientes interrogantes específicas:

1. ¿Cuál es el estado actual del conocimiento sobre la comprensión y registros de representación de los significados del número racional positivo?

2. ¿Cómo se presentan los significados del número racional en los libros de texto de matemática?

3. ¿Cómo es la comprensión de los significados del número racional de los estudiantes de formación docente?

1.4.2 Objetivo General

Evaluar la comprensión de los significados del número racional positivo, en su representación fraccional, de los estudiantes que reciben formación profesional de la Especialidad de Matemática y Computación de la Facultad de Ciencias de la Educación.

1.4.2.1 Objetivos específicos

1. Desarrollar un Análisis didáctico que integre diferentes teorías para afrontar el estudio de la comprensión de los significados del número racional.
2. Evaluar los significados del número racional utilizados en los libros de texto para introducir el concepto de número racional.
3. Describir la naturaleza de la comprensión de los significados del número racional que los estudiantes de formación docente ostentan.

1.4.3 Hipótesis General

La comprensión de los significados del número racional positivo, en su representación fraccional, se sustenta esencialmente en el significado parte-todo, que interfiere en la comprensión de los significados de medida, razón, cociente y operador, fenómeno que se manifiesta en los estudiante que reciben formación profesional de educación matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

1.4.3.1 Hipótesis específicas

1. El análisis didáctico proporciona una sólida fundamentación teórica y criterios objetivos para el estudio de la comprensión de los significados del número racional.

2. En los libros de texto de matemática, el significado de “parte-todo” es el más utilizado en la introducción del concepto de número racional, entendido como cociente de un par ordenado de enteros.
3. La comprensión se fundamenta esencialmente en el significado parte-todo del número racional, en tanto que la fracción como medida y razón es la menos comprendida.

1.5 JUSTIFICACIÓN

Como consecuencia del enfoque conductista en la educación peruana y el predominio de la matemática moderna, la mayoría de los profesores tienen la creencia que la matemática es una disciplina rigurosa y formal; su aprendizaje se apoya en la explicación de algoritmos y la resolución de cientos de ejercicios, con el objetivo de fijar el algoritmo en la memoria del estudiante, en una suerte de estímulo-refuerzo, además, excluye con mucha frecuencia las representaciones gráficas y centra su comunicación en el sistema simbólico de representación. Sin embargo, el papel de las representaciones gráficas está siendo retomado en la enseñanza de la matemática del nivel primario, como una vía de acceso a la comprensión del conocimiento lógico matemático, además, la inserción de las tecnologías de la información y la comunicación dictan esta tendencia. Estos aspectos reivindican la importancia de la comprensión representacional en el nivel educativo secundario (grupo etareo 11-17 años de edad). Se pretende presentar un tratamiento organizado de sistemas de representación para el estudio de la comprensión del significado del número racional positivo.

La Matemática Moderna, buscó la formalización en cuanto a la fundamentación de la matemática y a la intercomunicación, esto trajo serias consecuencias negativas para la enseñanza de la matemática. Uno de los preclaros exponentes de la

Matemática Moderna. Jean Dieudone (1986), señala en la introducción de su obra *Álgebra Lineal y Geometría Elemental*: “Me he permitido también no introducir ninguna figura en el texto...” “Es deseable liberar al alumno cuanto antes de la camisa de fuerza de las “figuras” tradicionales hablando lo menos posible de ellas (exceptuando, naturalmente, punto, recta y plano)...” (p. 280) esto es una prueba que los libros escolares se presentaban totalmente formalizados. Por esta razón la investigación reivindica la visualización de las representaciones matemáticas, examina la relación entre los diferentes sistemas de representación y valora las representaciones externas para el diagnóstico de la comprensión, pues, es uno de los canales para pretender observar el pensamiento del estudiante.

En definitiva, el estudio contribuirá al mejor entendimiento del fenómeno de la comprensión de objetos matemáticos, reconociendo la importancia de los sistemas de representación y su interconexión entre ellos. Esta experiencia evaluativa puede aplicarse a otros tópicos de la matemática, de modo que, en sus particularidades comprueben la validez de los supuestos teóricos que se plantean.

La proliferación de reformas que cíclicamente se han realizado en los sistemas educativos a nivel mundial, son evidencia de inconformidad con su funcionamiento y/o con los resultados que ellos obtienen. Particularmente, en Puno, es claro que el problema de la deficiente calidad de la formación matemática de los docentes y estudiantes en el nivel escolar, persiste y es grave, sin importar las definiciones de "calidad" y de "formación matemática" que se acojan. Por eso, este estudio en su parte interpretativa se propone escudriñar cuestiones más específicas de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, la naturaleza de la misma, la visión que el docente tiene sobre lo que significa aprender, la forma en que promueve dicho aprendizaje con especial énfasis en las representaciones que utiliza y la comprensión que promueve.

Experiencias personales de exploración, realizados en el marco de la formación continua de docentes y especialistas de matemáticas, demuestran las dificultades que presentan en su comprensión de los sistemas numéricos y, en especial, los números racionales. En una prueba exploratoria, se ha observado que el 31.5 % de estos docentes no logran solucionar el siguiente ejercicio:

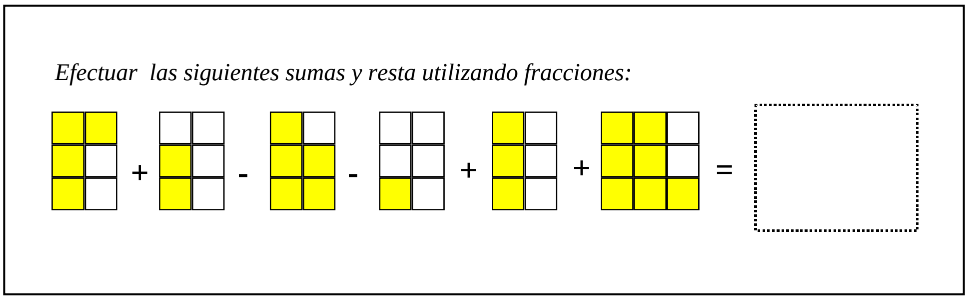


Figura 1.1 Enunciado de fracciones utilizando la representación pictórica

Se sospecha que, la resolución equivocada de este ejercicio se debe a que tienen dificultades para traducir las representaciones gráficas a representaciones simbólicas. Además, no recuerdan el algoritmo de la suma de fracciones heterogéneas. En otro ítem, se pide encontrar la fracción intermedia entre ½ y 2/3, los resultados de la prueba develan que el 37.3 % de los docentes no solucionaron el problema adecuadamente. Estos resultados, que si bien no son concluyentes, suscitan la necesidad de realizar observaciones más sistemáticas en el proceso de formación de maestros, explorar cómo es su comprensión de los números racionales positivos en su representante fraccional, como en el caso de los estudiantes de educación matemática, exige plantear investigaciones del problema percibido.

La investigación exploratoria, evalúa de forma sistemática el estado y características de la comprensión de los docentes en formación docente, del significado de las fracciones, su interpretación y traducción entre los diferentes sistemas de representación. Los resultados de este estudio permitirán dar pautas para plantear acciones de capacitación para los profesores y proponer algunos recursos didácticos que servirán para la conducción del aprendizaje de las fracciones de los educandos. Asimismo, los resultados del análisis didáctico presentados en el marco teórico y los resultados empíricos del estudio, proveerán los fundamentos para proponer propuestas de innovación para la enseñanza del número racional, en el primer año del nivel de educación secundaria.

1.6 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Los resultados y conclusiones del presente estudio, corresponden al caso de los estudiantes de educación matemática y computación de la Universidad Nacional del Altiplano, por tanto, no se aplican a otros casos, por lo que no pueden extenderse a la población regional y menos al ámbito nacional. Es un estudio de caso, que corresponde a la Facultad de Ciencias de la Educación, a partir de una muestra de 60 alumnos, a quienes se les aplicó una pruebas sobre comprensión de los significados del número racional.

Como se podrá deducir de los objetivos de esta investigación, no se han considerado aspectos relativos al proceso de enseñanza en general, metodología, currículo y evaluación, aspectos que pueden ser materia de otras investigaciones; nuestra preocupación es estudiar la naturaleza de la comprensión del concepto y significados del número racional, expresado como fracciones y su relación con los sistemas de representación que utilizan los estudiantes en la solución de cuestiones relativas al tema de fracciones.

Entre otras limitaciones que se sopesaron, está el dominio del idioma. La documentación revisada tiene su fuente en investigaciones, actas, libros esencialmente en idioma español; y algunos informes de investigación de universidades brasileñas, en idioma portugués. El idioma inglés como tercera opción, permitió en forma limitada acceder a la información sobre teoría de la educación matemática que forman parte de la fundamentación teórica.

A pesar de los esfuerzos, la revisión de antecedentes sobre los significados del número racional, creemos que fue parcial, pero suficiente, para tener una visión general del estado actual de la cuestión en el espectro de la comunidad de investigadores de la educación matemática.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 INTRODUCCIÓN

Siguiendo un proceso de concreción acorde con la delimitación del área problemática y con la caracterización del problema de investigación a tratar, en el presente capítulo se exponen inicialmente los resultados obtenidos en la fase del Análisis Didáctico correspondiente a la revisión primaria de antecedentes explicada en el apartado 2.2. En concreto, se presenta una síntesis estructurada de la información recopilada en torno a diferentes aspectos vinculados con la enseñanza y el aprendizaje del número racional en Educación Matemática. En segundo plano se estructuran los resultados secundarios y sus consecuencias para la investigación como elementos del Análisis Didáctico

El capítulo se divide en cinco apartados. En el primero se expone una breve descripción de la estructura, organización y exposición de la información seleccionada. A continuación, se presentan los distintos resultados primarios en dos apartados diferentes dedicados a los bloques temáticos básicos considerados para el número racional: cognición, aprendizaje y comprensión; currículum y enseñanza; fenomenología y epistemología. En todos los casos, como corresponde a una revisión de una cierta profundidad sobre conocimientos matemáticos tan complejos e importantes para la Educación Matemática, se incluyen resúmenes de cierta extensión acompañados de citas de los autores consultados. En un tercer momento se organizan los resultados secundarios; y en cuarto lugar, las consecuencias para la investigación.

2.2 ÁMBITOS DE ANÁLISIS Y EXPOSICIÓN DE CONTENIDOS

La información recopilada de las fuentes consultadas se estructura sobre la base de los cuatro bloques básicos sugeridos por el Análisis Didáctico (Capítulo III, apartado 3.3.1), concretados en esta ocasión a través de las siguientes temáticas estudiadas:

1. Aprendizaje y cognición. En este bloque se expone una síntesis organizada de los avances recientes producidos en la investigación sobre comprensión en matemáticas, una descripción de los principales componentes teórico-metodológicos que configuran la aproximación operativa a la comprensión del conocimiento matemático desarrollada en la tesis doctoral de Gallardo, además de una revisión de estudios sobre el aprendizaje de los números racionales centrados en la caracterización de las concepciones elaboradas por los estudiantes del número racional. (apartado 2.3).

2. Enseñanza y currículum. En este bloque se sintetizan algunas aportaciones relevantes en torno a la enseñanza del número racional, fundamentalmente en forma de sugerencias didácticas y propuestas metodológicas para el aula. Estos contenidos se completan con una descripción del tratamiento dado al número racional en el currículum peruano actual a través de sus disposiciones oficiales y libros de texto más extendidos (apartado 2.4).

3. Fenomenología. Este bloque reúne información correspondiente a la esfera fenomenológica del conocimiento matemático, en general, y del número racional, en particular. En primer lugar, se presentan resumidas las aportaciones teóricas y metodológicas desarrolladas por autores como Freudenthal (1983), Puig (1997), Gallardo (2006). Estos referentes genéricos se completan, en segundo lugar, con la descripción de los resultados obtenidos por algunos estudios específicos en los que se han desarrollado análisis fenomenológicos vinculados al número racional (apartado 2.5).

4. Epistemología. Este bloque centra su atención en la naturaleza del número racional a través de la caracterización de sus significados en la educación matemática y de la descripción de las principales representaciones externas que se admiten como conocimiento matemático (apartado 2.6).

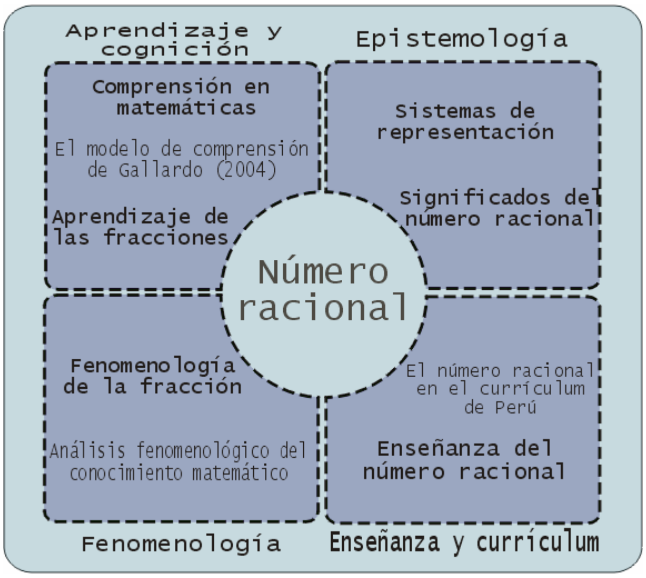


Figura 2.1 Ámbitos de análisis en la revisión primaria de antecedentes

2.3 COGNICIÓN, APRENDIZAJE Y COMPRENSIÓN DEL NÚMERO RACIONAL

2.3.1 Comprensión en Matemáticas

La comprensión del conocimiento matemático viene contemplándose como un tema básico de interés y un objeto de estudio prioritario para la Educación Matemática. En las últimas décadas la investigación sobre esta cuestión en el área se ha visto incrementada notablemente con estudios caracterizados por un elevado nivel de precisión, rigurosidad y prudencia en los problemas tratados, en los métodos empleados y en los resultados y conclusiones obtenidos. La creciente especialización ha generado además una considerable diversificación entre los estudios realizados, resultando difícil identificar en la actualidad aproximaciones consolidadas bajo las que afrontar los distintos problemas derivados de la comprensión del conocimiento matemático.

La revisión que se desarrolla en este apartado se centra sobre una representación de antecedentes relevantes surgidos en el área durante las últimas dos décadas que tiene a la comprensión como principal objeto de reflexión.

2.3.1.1 Dimensiones de la comprensión en matemáticas

La preocupación fundamental por el desarrollo de la comprensión matemática en los alumnos forma parte de un problema más amplio en el que también intervienen otras dimensiones del fenómeno. De hecho, es en el carácter multidimensional de la comprensión donde radica una de las principales causas por la que su estudio resulta una tarea altamente compleja y un condicionante para los distintos trabajos en curso.

Por lo general, las aproximaciones a la comprensión en matemáticas reconocen, al menos como referencia provisional para posicionar su estudio, algunas de las siguientes dimensiones del fenómeno: origen y fuentes; naturaleza y funcionamiento, factores; evolución, y efectos.

El *origen* hace referencia a las situaciones y circunstancias responsables de la aparición de la comprensión y las *fuentes* a los acontecimientos concretos previos generadores de tales situaciones. Por ejemplo, en términos constructivistas generales, el origen de la comprensión se sitúa en aquellas situaciones de desequilibrio cognitivo en las que se ve implicado el sujeto en su interacción con el medio. Las fuentes, por su parte, se encuentran en las experiencias generadoras de tales situaciones que obligan al individuo a elaborar respuestas adaptadas a cada situación particular (English y Halford, 1995). En este caso, la comprensión surge en este espacio de experiencias, desequilibrios cognitivos, respuestas adaptativas y búsqueda de estabilidad asociada.

Las dimensiones *naturaleza* y *funcionamiento*, estrechamente relacionadas, suponen enfrentarse a las complejas cuestiones sobre qué es y cómo se produce la comprensión. Por tratarse de un constructo que acontece en la esfera interna del individuo, y por tanto sin posibilidad de ser observado directamente, estas dimensiones suelen estudiarse al amparo de propuestas teóricas interpretativas de la relación no casual reconocida entre los estados mentales del sujeto y su comportamiento externo observable. Una de estas propuestas, ampliamente extendida, la encontramos en el enfoque representacional que desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones internas del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992; Romero, 2000; Goldin, 2002). El empleo de tipologías generales de comprensión (Hiebert y Lefevre, 1986) o de referencias metafóricas (Davis, 1992) son otras de las estrategias usuales presentes en el estudio de tales dimensiones.

Los *factores* se refieren a todos aquellos aspectos condicionantes de la comprensión. La especificidad del objeto de comprensión, las capacidades cognitivas generales del sujeto, la valoración personal que éste realiza sobre el propio objeto o las características del medio donde se produce la interacción entre ambos son algunos de los factores reconocidos por los que se ve afectada la comprensión (Sierpinska, 1994; Godino, 2000).

El estudio de la *evolución* se relaciona con la faceta dinámica de la comprensión y supone reconocer que el conocimiento no se adquiere de forma inmediata e instantánea sino que se va desarrollando en el individuo a lo largo del tiempo. La comprensión, por tanto, no es un fenómeno estático, sino que emerge, se desarrolla y evoluciona (Carpenter y Lehrer, 1999). En este contexto, la teoría dinámica de Pirie-Kieren para el crecimiento de la comprensión matemática (Pirie y Kieren, 1989, 1994; Kieren, Pirie y Calvert, 1999) aparece entre las propuestas más consolidadas y con mayor influencia en el estudio de esta dimensión en educación matemática. También, los modelos jerárquicos de categorías o niveles aplicados con el propósito de capturar los procesos dinámicos de la comprensión constituyen otra de las estrategias extendidas en la investigación en torno a la evolución. Un claro ejemplo de esta última opción se tiene en el modelo de proceso de dos ejes desarrollado por Koyama (1993, 2000).

Por último, los *efectos* se asocian a los resultados o productos derivados de la presencia de una determinada comprensión en el individuo. Suelen considerarse efectos observables los comportamientos adaptados, la aplicación de conocimientos, la resolución de problemas o la descripción de acciones. Entre los efectos internos no observables cabe mencionar como ejemplo las nuevas estructuras cognitivas y semánticas resultantes de un cambio en la comprensión. Esta dimensión aparece reflejada en aproximaciones como la de Duffin y Simpon (1997, 2000) donde se describen algunos de los efectos internos y externos (por ejemplo, sentirse capaz de reconstruir lo olvidado o derivar consecuencias, respectivamente) asociados a las tres componentes de su definición de comprensión.

2.3.1.2 Relación con otras nociones cognitivas

La aproximación a la comprensión a través del estudio de su relación con otras nociones cognitivas de similar complejidad constituye otra de las alternativas empleadas en la exploración de este fenómeno en educación matemática. Desde esta perspectiva, la comprensión comparte protagonismo con otros objetos de investigación de interés para el área como el significado, el aprendizaje, el pensamiento matemático o la competencia, entre otros. La propuesta, que reconoce la comprensión como necesariamente vinculada al resto de configuraciones cognitivas, define una vía de acceso complementaria que extiende la posición centrada en el análisis específico de las distintas dimensiones propias del fenómeno.

Es posible apreciar esta visión integral de la comprensión matemática en trabajos como los de Byers y Erlwanger (1985), donde se vincula con el aprendizaje y la memoria, Godino y Batanero (1994) en relación con el significado de los objetos matemáticos o Bender (1996) cuando asume que imagen y comprensión son modos de pensamiento distintos aunque estrechamente relacionados. Un aporte reciente en este mismo sentido proviene de Warner et al. (2003) al estudiar la contribución del pensamiento matemático flexible en el crecimiento de la comprensión.

2.3.1.3 Valoración y comprensión

La valoración está presente en el tratamiento de la comprensión en matemáticas. Los resultados procedentes de las distintas vías de acceso y dimensiones contempladas para su estudio encuentran en esta actividad un condicionante metodológico de primer orden. Por lo general, las aproximaciones en educación matemática suelen ser conscientes de este hecho y entre sus configuraciones y planteamientos teóricos resulta frecuente encontrar referencias y supuestos básicos compartidos en torno a la valoración, llegándose a reconocer circunstancias tales como:

- su elevada complejidad y existencia de limitaciones inherentes a su propia naturaleza,
- la influencia de la especificidad del conocimiento matemático en la valoración,
- la adecuación de las manifestaciones observables como vía para obtener información sobre la comprensión de los alumnos.

Referentes genéricos como estos sirven de base a los diferentes enfoques para desarrollar sus propuestas de valoración en correspondencia con aquellos aspectos particulares de la comprensión que son centro de su interés, generándose por ello una variedad de posibilidades sobre los modos y términos en los que valorar la comprensión y sobre los métodos, técnicas e instrumentos a emplear. Entre las contribuciones que se vienen realizando en este sentido, resultan relevantes las propuestas que plantean valorar la comprensión en función de la representación y las conexiones internas del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992), teniendo en cuenta la superación de obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1990, 1994) o según sean las relaciones con significados institucionales preestablecidos (Godino y Batanero, 1994). Igualmente, destacan los métodos y técnicas centrados en la elaboración de perfiles de comprensión (Pirie y Kieren, 1994) así como las estrategias y procedimientos de valoración multifacética basados en el análisis del conocimiento matemático, como son los análisis semántico y estructural propuestos por Niemi (1996), el análisis de los significados praxeológicos de los objetos matemáticos derivado del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002a, 2002b) o, más recientemente, el análisis fenómeno-epistemológico del conocimiento matemático desarrollado y aplicado en Gallardo y González (2006).

2.3.1.4 Contribuciones de las aproximaciones

Otro referente organizativo para las aproximaciones a la comprensión del conocimiento matemático, complementario al dimensional ya descrito, se obtiene atendiendo a las posibles consecuencias que se derivan de ellas en forma de:

1. Implicaciones didácticas para la enseñanza de la matemática

Los estudios sobre comprensión suelen venir acompañados de recomendaciones, propuestas e iniciativas de distinta índole para fomentar el aprendizaje comprensivo entre los alumnos. Para poder garantizar su utilidad y efectividad en educación matemática interesa que tales enfoques manifiesten una clara potencialidad descriptiva y prescriptiva (Koyama, 1993). Este es el caso del modelo propuesto por Gallardo y González (2006), donde se facilita un procedimiento operativo para la identificación y organización de situaciones matemáticas de utilidad para la práctica docente.

2. Repercusiones sobre otros focos de estudio en educación matemática

Las aproximaciones sobre comprensión aportan, además de información específica sobre su ámbito de estudio, referencias añadidas con las que mejorar la situación actual de conocimientos en torno a otras áreas de investigación de interés para la educación matemática, organizando, interpretando, explicando, solucionando o ampliando, en su caso, las distintas problemáticas ya existentes. Muestras de ellos son las aportaciones de la aproximación representacional a la controversia vigente sobre la enseñanza del cálculo aritmético elemental en sus distintas manifestaciones, concretadas por ejemplo en propuestas basadas en la construcción de relaciones mediante la comparación de algoritmos alternativos como vía para favorecer la comprensión. También son destacables las consecuencias derivadas de la aplicación del modelo Pirie-Kieren en el ámbito de la formación inicial de profesores de matemáticas (Cavey y Berenson, 2005).

2.3.1.5 Fronteras en la investigación sobre comprensión en matemáticas

Los resultados proporcionados por las distintas investigaciones realizadas en educación matemática van configurando a lo largo del tiempo un cuerpo creciente de conocimiento contrastado y consolidado en torno a los distintos aspectos vinculados con la comprensión en matemáticas. Este progreso contrasta, no obstante, con limitaciones importantes para las que la investigación actual aún no ha encontrado soluciones definitivas. De manera específica, las fronteras reconocidas que delimitan el estudio de la comprensión del conocimiento matemático vendrían dadas fundamentalmente por:

- Las cuestiones abiertas inherentes a cada dimensión particular del fenómeno. Este es el caso, por ejemplo, del problema de la existencia de límites en la adquisición de la comprensión o de la encapsulación de su dinamismo, presentes en el estudio de la evolución. También de la dificultad que supone lo inobservable en el análisis de la naturaleza y el funcionamiento internos.

- El problema de la interpretación de la acción del otro. El estudio de las distintas dimensiones asociadas a la comprensión se ve afectado en su conjunto por la naturaleza interpretativa de la valoración. De entrada, se acepta que el modelo básico del observador que pretende obtener información sobre la comprensión del individuo inmerso en una actividad matemática comparte la complejidad propia de las situaciones hermenéuticas condicionadas por el lenguaje (Brown, 2001).
- La controversia vigente en torno al grado de profundidad y extensión que habría de exigirse al estudio de la comprensión en matemáticas. Admitir el desarrollo de la comprensión como fin de la educación matemática genera en el ámbito de la investigación la cuestión básica de aclarar los conocimientos que resultan precisos para afrontar esta labor con garantía, cumpliendo con los intereses del área de forma consensuada con la comunidad científica.

En resumen, el carácter multifacético de la comprensión permite establecer marcos referenciales, como el expuesto aquí, con los que organizar la diversidad de resultados que se desprenden de los distintos estudios realizados sobre el fenómeno en educación matemática, al tiempo que posibilitan identificar, por las componentes analizadas en ellos, sus propósitos fundamentales al enfrentarse con la comprensión. De igual forma, la estructura organizativa resultante en este caso se muestra útil para posicionar las limitaciones específicas y cuestiones abiertas que llegan a delimitar las fronteras del estudio de la comprensión en matemáticas. El esquema de la figura 2.2 sintetiza de forma más clara la relación entre los distintos aspectos intervinientes en la investigación sobre comprensión en matemáticas según la organización de antecedentes llevada a cabo.

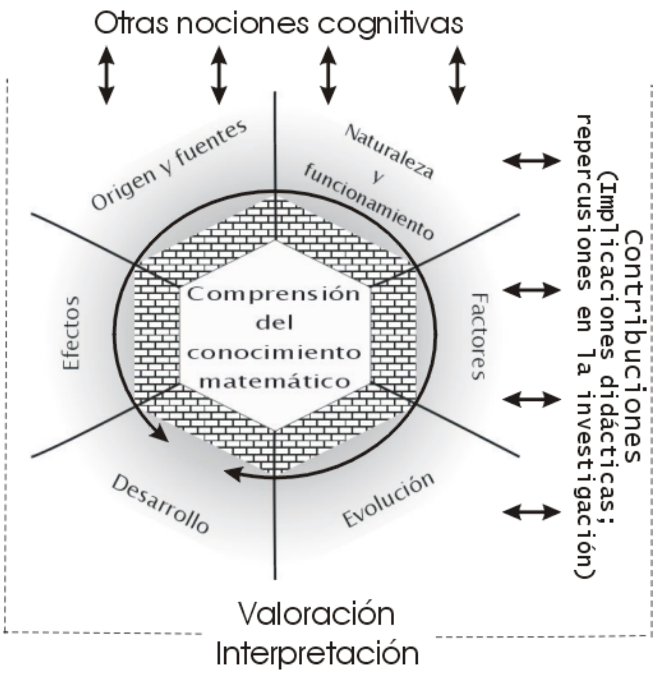


Figura 2.2 Organizadores para la investigación sobre comprensión en matemáticas

2.3.2 Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje

El concepto de obstáculo fue introducido por Bachelard en 1938, en su célebre libro *La Formación del Espíritu Científico*, en el cual se explica que los obstáculos son:

> ....Hay que plantearse el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. Y no se trata de considerar obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, pues es, precisamente, en el mismo acto de conocer, íntimamente, cuando surgen, como una necesidad funcional, torpezas de entendimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, y donde descubrimos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (Citado por Socas, 1997, p.136)

La transferencia de este concepto en la didáctica de la matemática se debe a Brousseau quien justifica la flexibilidad de esta idea "la propia noción de obstáculos está constituyéndose y diversificándose: no es fácil decir generalidades pertinentes sobre este tema, es mucho mejor estudia caso por caso". Para Brousseau los obstáculos en el sistema didáctico pueden ser de origen: ontogénico o psicogénico, didáctico y epistemológico,

La acepción que se adjudica al concepto se obstáculo epistemológico tanto para Bachelard y Brousseau es:

> aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas (Citado por Socas, 1997, p. 137).

La historia de la matemática puede ser un auxiliar para el maestro quien debe detectar núcleos históricos de obstáculos epistemológicos en el desarrollo del *saber* *sabio* evento análogo que puede reproducirse en la actividad de enseñanza aprendizaje. Socas (1997).

2.3.2.1 Dificultades, obstáculos epistemológico y errores

Según Socas (1997) las dificultades están asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas. Un aspecto relevante es que la matemática utiliza una simbología acompañada de lenguaje habitual. El lenguaje natural ayuda a interpretar los símbolos sin embargo en esta función del lenguaje se detecta dificultades de comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Una dificultad es el resultado de la diferencia de significado que se le adjudica en matemática a ciertos vocablos comunes. Palabras como, por ejemplo matriz, raíz, quebrado; estos vocablos en matemática adquieren un significado diferente.

Otras dificultades originados en el lenguaje por el resultado de usar vocablos que en ciertos contextos pueden ocasionar confusión (reducir la fracción), o también las palabras que tiene su origen en la matemática como parámetro o número racional.

Algunas de estas dificultades pueden tener su explicación en el dominio del lenguaje matemático, su semiótica, en especial su componente pragmático que se refiere al estudio del sentido que se da al discurso en función del contexto en el que se utiliza una determinada palabra.

Las dificultadas asociadas a los procesos de pensamiento matemático se manifiestan con mayor claridad cuando el estudiante se enfrenta a situaciones de pensamiento deductivo formal, la educación básica ha optado por abandonar la enseñanza de la argumentación lógica para hacer demostraciones formales, este hecho evidentemente trajo el descuido del desarrollo del pensamiento lógico.

Los errores en el aprendizaje de las matemáticas según Socas (1997) se clasifican en tres tipos: primero, errores que tienen su origen en un obstáculo, segundo, errores que tienen su origen en una ausencia de sentido o significado, estos están relacionados con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático. Los errores de este tipo son de naturaleza semiótica en sus tres componentes sintáctico, semántico y pragmático y tercero, errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

2.3.3 Aprendizaje y Comprensión del Número Racional

En este numeral se incluye los antecedentes relacionados al fenómeno de la comprensión del número racional, provenientes de investigaciones previas realizadas en diferentes latitudes.

2.3.3.1 Aprendizaje de las fracciones y sus diferentes significados

Dada la importancia de las dificultades detectadas en la enseñanza- aprendizaje de las fracciones se da cuenta del estudio de Valpereiro (2005). El objetivo es identificar las concepciones que los alumnos de las 4ta y 8va serie (grado) de Enseñanza Fundamental de escuelas públicas, presentan con relación a los cinco significados de la fracción: como número, parte–todo, cociente, medida y operador multiplicativo.

El marco teórico se respalda en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), y las ideas de Nunes et al. (2004), Valpereiro (2005), quienes insisten en clasificar los significados de los números racionales, en su representación de fracción como parte–todo, medida, número, operador multiplicado y cociente.

Es importante las referencias que se presentan de Kieren sobre las interpretaciones y significados del número racional como relación parte–todo, cociente, medida, razón y operador. Además, se referencia a Ohlsson, Behr, Nunes para fundamentar los significados del número racional.

La investigación es de tipo diagnóstico cualitativo, que pretende describir la comprensión de los significados de las fracciones. El universo de estudio está constituido por estudiantes de escuelas públicas, estatales localizadas en la región central de la ciudad de São Paulo. Se seleccionó el 4to grado por ser éste donde el estudio de las fracciones se enfatiza y 8º grado por ser éste el grado concluyente de la Enseñanza Fundamental. La muestra es de 65 estudiantes de 4º grado y 58 alumnos de 8º grado, a quienes se aplicó una prueba de 19 cuestiones que tenían la intención de evaluar los cinco significados de las fracciones distribuidas en 29 ítem.

La conclusión más interesante según nuestro criterio es:

> ...en las series (grados) iniciales de Enseñanza Fundamental deben ser trabajados situaciones que aborden los significados, parte-todo, medida y cociente, visto que estos alumnos poseen apenas el concepto de número racional en tanto que a partir de la 5ta serie, del mismo nivel de enseñanza, sean estudiado también los significados número y operador multiplicativo, teniendo en cuenta la construcción de los números racionales que comienza a ocurrir a partir de esa serie (Valpereiro, 2005, p. 188).

La primera parte de la conclusión se sustenta en el hecho que esos significados son más afines a los números naturales. Cabe preguntar por qué el alumno tiene dificultades para comprender los significados por ejemplo, de fracción como operador. La curiosidad científica debería conducir a buscar explicaciones y ver si son superables esas dificultades y puede ser estudiado en la 4ta serie (grado) los significados de operador y razón.

2.3.3.2 Concepciones sobre fracciones de alumnos después de los estudios formales

Rodríguez (2005) en su tesis de maestría presentado en la Universidad Pontificia Católica de Sao Paulo, estudia las concepciones del número racional haciendo énfasis en el diagnóstico de los significados parte–todo y cociente. La investigación se desarrolla en el ámbito de los estudiantes de diferentes niveles educativos.

A pesar que los números racionales están presentes en casi toda la educación escolarizada, se observa que el dominio que adquieran entraña algunas incongruencias, así un alumno puede dominar los algoritmos y puede tener éxito en el contexto escolar y mostrar dificultades para resolver situaciones de la vida cotidiana o a la inversa.

El objetivo de la investigación es: “Identificar aspectos del concepto de número racional cuya construcción no se estudió eficazmente en el periodo de educación básica, cuando fueron trabajados en el aula y que permanecen sin ser aprendidos por los alumnos por largo tiempo, durante el proceso de escolarización” (Rodríguez, 2005, p. 11). La interrogante es: “¿qué aspectos del concepto de fracción en los significados parte–todo y cociente permanecen sin ser aprendidos por los alumnos de octavo grado de enseñanza fundamental, tercer grado de enseñanza media y enseñanza superior en el área de exactas?” (p. 15). La hipótesis es: la enseñanza formal de fracciones no ha sido capaz de proveer situaciones a los alumnos para que el concepto sea plenamente aprendido como se observara en niveles avanzados de escolaridad.

Los fundamentos teóricos del estudio se sustentan básicamente en tres autores; primero, Caraça quien en su libro *Coceitos fundamentais da matematica* de 1952 postula que el surgimiento del campo de los números racionales es a partir de las necesidades humanas de comparar magnitudes, lo que da lugar al surgimiento de la unidad de medida y del manejo de los principios básicos de la matemática. Segundo, el aporte de Vygotsky respecto a la construcción del concepto en la interacción entre la vida escolar y cotidiana. Según este psicólogo ruso existen dos tipos de conceptos; los cotidianos (espontáneos) y científicos, y estos últimos se forman en situaciones de educación formal y no son aprendidos en forma definitiva. Tercero, la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990).

La investigación fue de naturaleza causal comparativa y de carácter diagnóstico. En una muestra de 29 alumnos de enseñanza superior, 31 alumnos de enseñanza media y 13 alumnos de octavo grado de escuela, se ha aplicado un cuestionario que evalúa la comprensión de dos significados parte–todo y cociente considerados como los más ligados a la idea de construcción del numero racional, además se sostiene que por medio de estos significados se introduce el concepto de fracción en el inicio de la escolaridad. En la medida que la formación de un concepto puede durar largo tiempo se ha escogido una muestra de tres diferentes niveles educativos.

A igual que Bher, Rodríguez (2005) concluye que la correcta construcción del concepto de número racional es un factor fundamental para el aprendizaje de otros conceptos más sofisticados, y que el estudio del número racional es particularmente adecuado para desarrollar estructuras cognitivas para el tránsito del pensamiento concreto al operatorio formal.

En la evaluación del significado de la fracción como cociente se encontró que en situaciones de cociente con cantidades discretas, la mayoría de los estudiantes usan la cardinalidad del conjunto a ser repartido. Como consecuencia, se percibe una resistencia a asumir un número natural como un racional. Así mismo, los educandos no logran identificar a las fracciones como entes numéricos en su plenitud, evidenciado la dificultad de aceptar que el conjunto de los números naturales esta incluido en los racionales.

2.3.3.3 Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto

De León (1998) sostiene que el fracaso en el aprendizaje de las fracciones tiene su explicación en la pobreza conceptual, como consecuencia de la priorización del significado del fraccionamiento de la unidad. El objetivo del estudio es analizar los procedimientos de los niños de primaria al resolver situaciones de reparto siguiendo los supuestos de Vergnaud que la fuente del saber matemático es la solución de problemas.

El estudio se fundamenta en la teoría cognitiva desarrollada por Vergnaud (1990) al estudiar la psicogénesis de los contenidos matemáticos. La antropología de Chevallard (1991) concerniente a la transposición didáctica. La teoría sobre las situaciones didácticas de Brousseau (2004), e investigaciones centradas en construir, experimentar y analizar situaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula.

Algunas de las interrogantes del estudio son: ¿qué procedimientos usan los niños al resolver problemas de reparto? ¿qué dificultades encuentran los niños para dar significado a las situaciones de reparto? ¿qué conocimientos precisos se necesitan para dar sentido a los problemas de reparto?

La muestra de 36 niños fue aleatoria, de diferentes estratos sociales, ocho por cada grado de estudios: primero, tercero, cuarto, quinto y sexto. De esta manera se intentó tener una muestra de naturaleza transversal. La recolección de datos se efectúa por medio de entrevistas de 45 minutos, las mismas fueron estructuradas según el método clínico de Piaget. Los niños fueron enfrentados a tres tipos de problemas; de reparto, de elección del pedazo resultado de un reparto y de comparación de reparto.

Las conclusiones señalan que en cada una de las situaciones se identificaron tres formas de organización de los procedimientos de solución.

a) Formas de organización de las situaciones de reparto.
   En las situaciones de reparto se pide a los niños que repartan equitativa y exhaustivamente cierta cantidad de chocolates entre determinada cantidad de niños. Se ha encontrado que niños de primero y segundo grados se caracterizan por tener dificultades en la coordinación de la exhaustividad y equitatividad y en interpretar los resultados de las particiones desde el esquema de los números enteros, constituyéndose en un obstáculo epistemológico.
b) Formas de organización en selección del pedazo. Se entiende la selección de pedazo resultado de un reparto previo; a partir de un reparto de chocolates ya realizado, entre cierta cantidad de niños, se pide a los alumnos que seccionen el pedazo de chocolate que le tocó a cada niño; el pedazo lo seleccionan de cuatro posibles conjuntos de reparto.
   La mayoría de niños tienen dificultades para resolver el problema de la selección del pedazo, los niños de primer grado no han construido en el plano de acción implícita la relación de igualdad entre el total de enteros de un reparto y el total de pedazos del mismo reparto, en tanto que los de tercero al sexto que tiene esa relación de manera implícita no logran funcionarizarla con anticipación en el contexto de la selección del pedazo.

c) Formas de organización de la situación de comparación de resultados de reparto:

En la comparación de repartos los niños comparan los resultados de dos repartos y deciden a cuál reparto le tocó mas chocolates a un niño (o menos) o bien, si les tocó lo mismo. Aquí se encontró tres formas de organización en los procedimientos: La comparación sobre la base de datos aislados de las situaciones; comparación sobre la base del establecimiento de relaciones recíprocas entre los chocolates y los niños; comparaciones a partir de resultados de reparto.

Los esquemas de los números naturales funcionan como un conocimiento que se resiste a ser rechazado y a modificarse en lo mas mínimo, se constituye en un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de las fracciones en el contexto de reparto esta dificultad también se debe a la falta de coordinación de los esquemas con los que cuentan los niños, como a una ausencia de diferenciaciones de las relaciones que caracterizan a la situación problemática.

Se encontró que en el aprendizaje del significado de la fracción en el contexto de reparto los niños primero, ignoran las relaciones fraccionarias, luego, incorporan de manera implícita las relaciones fraccionarias dependiendo del uso de material y cometiendo errores, finalmente construyen el modelo fraccional durante la solución de las situaciones problemáticas de reparto.

2.4 CURRÍCULUM Y ENSEÑANZA DEL NÚMERO RACIONAL

Aquí se presentan antecedentes de la investigación relacionados a la enseñanza de los significados del número racional y una revisión de los dispositivos legales que regulan los programas curriculares del curso de matemática en el nivel primario, concretamente el contenido “Números Racionales”. También se revisa la teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard por tener implicancias teóricas para el análisis posterior de los libros de texto de matemática que se realiza en el Capítulo IV.

2.4.1 Consideraciones de la Enseñanza de la Matemática

2.4.1.1 La instrucción que construimos

La percepción que transmiten la estructuración de los libros de textos es que están diseñados para el entrenamiento "training" de los algoritmos, generalidades, principios y definiciones presentados por el instructor. Para que los alumnos estén técnicamente diestros en el manejo de los conocimientos objetivados y externos al sujeto que alcancen el *"competent performance"*. Esta forma de presentar los contenidos matemáticos no son aprendidos en forma comprensiva. Este enfoque excluye la posibilidad de generar comprensión, porque, el acceso al conocimiento, o a los dominios de consenso se logra a través de experiencias artificiales subjetivas (Arcavi 1995).

Los problemas y ejercicios que se plantean, en los libros de texto, a los alumnos tienen la finalidad de afianzar la memorización del contenido a través de la reiteración; lo que se debe hacer es que se planteen problemas que, para su solución, no se utilice las técnicas aprendidas anteriormente sino que el alumno se sienta conducido a utilizar su comprensión de los conceptos y establezca conexiones con otros conceptos conocidos (Arcavi 1995). La solución de un problema o ejercicio sólo conduce a la aplicación de un algoritmo conocido, son el resultado de una operación, y lo recomendable es que el alumno tenga que argumentar, establecer conexiones entre los conceptos.

En los libros de textos analizados en el siguiente capítulo se percibe que el tratamiento del número racional es parcial porque se trabaja básicamente con dos representaciones usuales, las representaciones simbólicas y eventualmente gráficas, la representación en la recta numérica es utilizado escasamente para transmitir algunos conceptos, en tanto que se hace un uso casi exclusivo de la representación simbólica, alfanumérica, lo que produce en el alumno un aprendizaje del significado parte-todo. Lo recomendable es manipular diversos sistemas de representación y se establezca las relaciones entre ellas para comprender la esencia de los significados del número racional.

2.4.1.2 La Transposición Didáctica

La ciencia Didáctica de las Matemáticas tiene por objeto de investigación el juego que se realiza entre docente, los alumnos y un saber matemático. El tercer componente es ocasión de las siguientes interrogantes ¿qué es el saber enseñado? ¿qué relación entabla con lo que se proclama de él fuera de ese ámbito?¿qué relación se entabla entre el saber sabio y saber enseñado? y qué distancia existe entre ellos? Estas y otras cuestiones explica Chevallard en su teoría de la Transposición Didáctica, entendida como:

> Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacer apto para ocupar un lugar entre los *objetivos de enseñanza*. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la *transposición didáctica*. (Chevallard, 1991, p. 45).

El concepto de transposición didáctica como el paso del saber sabio al saber enseñado, se convierte en una herramienta de análisis del fenómeno de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Para el didacta, en cuanto sujeto investigador, la transposición didáctica le permite ejercer su vigilancia epistemológica, en tanto que para el enseñante el reconocimiento de la transposición didáctica supone el resquebrajamiento de su función didáctica. El concepto de transposición observa la transformación del saber sabio en el saber a enseñar. El docente niega esta verdad y esta negación hace visible otra verdad del funcionamiento didáctico; no se comprende lo que ocurre en el interior del sistema didáctico sino se toma en cuenta su exterior. La conciencia didáctica es cerrada porque el sistema didáctico es abierto. Por eso ocurre que el saber a enseñar mas aún el saber sabio es ignorado, se olvida en el proceso la transposición didáctica. Este olvido se debe a la autonomía relativa del sistema didáctico. El sistema didáctico trata con un saber enseñado y produce un saber exiliado, separado de sus orígenes históricos, de la esfera del saber sabio, considerándose el saber enseñado en el sistema didáctico como una suerte de paria extranjero, Chevarllard (1991).

2.4.1.3 Las nociones matemáticas, paramatemáticas y protomatemáticas

Según Chevallard (1991) los números racionales, los decimales serían nociones matemáticas que llegan a ser objetos de enseñanza aprendizaje y herramienta de estudio, Estas nociones tienen sentido dentro de la comunidad de docentes de un mismo nivel, así el sentido de número racional será diferente entre la comunidad de enseñantes del nivel primario y universitario. Las nociones matemáticas son construidas, éstas adoptan la forma de una definición o de una "construcción", seguida de operaciones, propiedades y ocasiones de uso, como por ejemplo el campo de los números racionales. De los objetos de saber como nociones matemáticas el estudiante debe poder reconstruirla (enunciar una definición), demostrar propiedades y reconocer un número de ocasiones de uso de estos objetos matemáticos.

Las nociones paramatemáticas son las herramientas de la actividad matemática, estos no son objetos de estudio para el matemático, son los auxiliares para la enseñanza, son las nociones aprendidas espontáneamente, pero no enseñadas. La diferencia entre herramienta y objeto de estudio puede ser relativo; esta diferencia depende de la práctica precisa de enseñanza. Las nociones paramatemáticas son objetos de los cuales el docente toma conciencia, a los que da un nombre, que entra en su campo de percepción didáctica.

Las nociones protomatemáticas son movilizadas implícitamente por el contrato didáctico. El desarrollo de capacidades se evidencia a través de su desempeño, estas muestras de desempeño capaz son de naturaleza transparente, subyacente. Así la capacidad de reconocer significados del número racional no se enseña, sino están inmersos en el contexto de situaciones, que el docente y/o estudiante puede eventualmente reconocer. Este reconocimiento está sometido al filtro de percepción definido por el contrato didáctico y su jerarquía de valores. El trabajo y evaluación de las capacidades pasa efectivamente por el filtro del contrato didáctico. De la "falta de dominio de una capacidad requerida por el contrato didáctico para su buen entendimiento" (Chevallard, 1991, p. 64). puede surgir lo que Chevallard llama dificultad protomatemática. El dominio sería un prerrequisito del contrato didáctico que actúa como un filtro. Las nociones protomatemáticas se sitúan en la esfera de lo implícito expresados en el contrato didáctico, y sólo serán explicitadas como ruptura del contrato didáctico cuando se produce la dificultad protomatemática.

Estas nociones matemáticas conforman estratos cada vez menos explícitos de los conocimientos y cada vez más profundos del funcionamiento didáctico del saber. Las nociones protomatemáticas son menos explícitos que las nociones paramatemáticas y éstas a la vez menos explicitas que las nociones matemáticas. Sin embargo, se producen mutaciones, por ejemplo las nociones protomatemáticas pueden convertirse en nociones paramatemáticas.

2.4.1.4 Los saberes escolarizados su preparación didáctica

Para Chevallard los saberes escolarizables como resultado de la transposición didáctica cumplen con los requisitos de desincretización, despersonalización, la programabilidad de la adquisición, la publicidad del saber y el control social de los aprendizajes. Estos requisitos se ven realizados a través de la preparación didáctica que denomina la puesta en texto del saber. En este texto quedan explicitadas las nociones matemáticas, y la existencia real por ser necesaria para la construcción del texto, pero no es su objetivo las nociones paramatemáticas. En tanto queda de forma implícita las nociones protomatemáticas.

La textualización del saber trae consigo la delimitación de saberes parciales, los agentes de la transposición usualmente son concientes del carácter delimitado de los saberes parciales independizados. En el proceso de textualización de las nociones matemáticas, se manifiesta las nociones protomatemáticas a través de los prerrequisitos en tanto no son reconocidos como tales. La delimitación de las nociones matemáticas produce su descontextualización, su desubicación contextual que le otorga sentido completo; se produce la ruptura del juego intersectorial constitutiva del saber en su movimiento de creación y de realización, como lo enfatiza Chevallard. En segundo lugar, la textualización del saber produce la despersonalización como la disociación entre el pensamiento y sus producciones discursivas. Además, la puesta en texto de los saberes posibilita la objetivación, es decir, la publicidad de las nociones matemáticas. Esta a la vez posibilitará el control social de los aprendizajes. Finalmente, el texto es una norma de progresión en el conocimiento en el que se programa la adquisición del saber. Esta programabilidad se manifiesta en la secuenciación de razonamientos y nociones textualizados y se pretende que el aprendizaje sea isomorfo a la estructura del texto, hecho que no es así en la realidad.

2.4.2 Enseñanza del Número Racional

Antecedentes de investigación sobre los significados de número racional. Se hace un breve resumen neutral de los estudios en un primer instante y luego en el análisis didáctico se expondrán los resultados primarios y secundarios así como las consecuencias para nuestro estudio.

2.4.2.1 Creencias, concepciones y competencias de los profesores sobre las fracciones

Factori (2006) investiga las creencias, conceptos y competencias para determinar el entendimiento de la noción fracciones que presentan los profesores que enseñan en los grados iniciales de Enseñanza Fundamental

El objetivo es identificar y analizar las creencias, concepciones y competencias de los profesores. La interrogante de investigación es: ¿cuál es el entendimiento que los profesores de los 1º y 2º ciclo de Enseñanza Fundamental presentan con relación al concepto de fracción?

El estudio se fundamenta en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990); Factori cita la clasificación de Nunes et. al. (2004) quien sostiene que los significados son cinco: la fracción como parte-todo, situación cociente, significado medida, significado número y situación operador multiplicativo.

Además de una revisión histórica del desarrollo del concepto de número racional se bosqueja una perspectiva escolar que esboza las categorías de análisis de las fracciones: forma de introducción del concepto; cuándo y cómo se introduce el concepto formal; los cinco significados de la fracción, cantidades continuas y discretas; forma de enunciar los problemas con o sin representación icónica; predominio de ciertas fracciones como 1/2, 1/3, 2/5; los invariantes del concepto de fracción orden y equivalencia; y la frecuencia con que el concepto de fracción es explorado en cada libro escolar.

La investigación describe el entendimiento de los significados de la fracción de los docentes del 1º y 2º ciclo de enseñanza fundamental. Se aplicó una prueba que recoge la información sobre el perfil del docente, creencias, conceptos y cuestiones relativo a las competencias, además, se entrevistó al 10% de los 51 profesores polivalentes de tres diferentes escuelas de la red municipal de la ciudad de Osasco.

Las conclusiones del estudio son: Respecto a la "creencia", se encontró que la circunstancia de que los profesores estén o no trabajando en la enseñanza del contenido de fracciones, no influye es sus creencias, es decir la creencia es más fuerte que la práctica docente. Una tercera parte de los profesores, tienen dificultades para reconocer la división como la operación por excelencia de la fracción y una mayoría de los profesores creen que la fracción es un concepto "abstracto".

El docente percibe que los estudiantes tienen dificultades para aprender el concepto de fracción y frente a eso propone enseñar fracciones por medio de percepciones más concretas y no relaciona la dificultad con deficiencias relacionadas a lógico matemáticas.

Respecto a las "concepciones", los profesores presentan serias dificultades para elaborar situaciones problemáticas que favorezcan la enseñanza de las fracciones. Con relación a los significados de fracción, el primer grupo de profesores muestra que sus concepciones están fuertemente ligadas al significado parte-todo como cantidades continuas, mientras que el segundo grupo muestra mayor diversidad en su concepción, abarca los significados operador multiplicativo y cociente, además de mayor manejo de cantidades discretas y continuas. El significado parte-todo se encuentra fuertemente implícito en el conocimiento del profesor, también se constató que los textos escolares influyeron mucho en este desmesurado predominio del significado parte-todo. Además el significado de medida y número no tuvieron presencia en los problemas creados, quizás por que los textos escolares no exploran este significado.

En cuanto a la “competencia” que muestran los profesores, Factori (2006) encontró que el mejor desempeño se mostró en situaciones que involucran los significados parte-todo, operador multiplicativo, seguido del significado medida, y los peores desempeños se muestran con los significados cociente y el significado número.

2.4.2.2 Modelo de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria

Para Escolano y Gairín (2005) las dificultades en el aprendizaje de los números racionales, son básicamente conceptuales, procedimentales de relaciones y operaciones de la propia estructura numérica de los números racionales, y en parte, son el resultado de procesos instructivos inadecuados. Se encontró en España en el 2002 que “son casi tres de cada cuatro los que tienen dificultad para comprender en concepto de fracción y operar con fracciones” (INCE, 2002, p. 2) citado por Escolano y Gairín (2005).

Asumen el supuesto que en el sistema educativo español la enseñanza de las fracciones prioriza el significado parte-todo y pretende demostrar que el significado parte-todo provoca dificultades en su aprendizaje. Proponen resolver tres cuestiones: ¿el significado parte-todo es un significado diferenciado o está incluido en otros?, ¿por qué se prioriza su utilización?, ¿qué efectos provoca en el aprendizaje?.

El significado parte-todo de los números racionales es discutido respecto a su legitimidad como tal, así Behr et al. (1992) admiten cinco significados de las fracciones: parte-todo, cociente, razón, operador y medida; en tanto que Kieren (1999) considera el significado parte-todo como parte de los significados de cociente y medida.

Para Escolano y Gairín, el significado parte-todo no tiene significado de medida, cociente, razón y operador. Ellos arribaron a las siguientes conclusiones:

1. “la fracción como significado parte-todo no surge de las necesidades humanas (en el sentido que nombró Bishop, 1999), puesto que la génesis

histórica del número racional se encuentra en la medida de cantidades de magnitudes – bien realizada directamente o bien realizadas para expresar el resultado un reparto – o en la comparación de dos cantidades de magnitud, ya medidas, que da sentido a la idea de razón” (Escolano y Gairín, 2005, p. 22).

2. El “significado parte-todo habría que situarlo en la práctica educativa, y ubicarlo entre los recursos didácticos creados por necesidades del proceso de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas” (Escolano y Gairín, 2005, p. 23).

La priorización del significado parte-todo en la escuela se justifica, primero, porque en la enseñanza se elude el proceso de medida con objetos y; segundo, se abrevia los periodos de instrucción. Además, Escolano y Gairín (2005) encontraron tres obstáculos didácticos:

1. Se obstaculiza la formación de concepciones adecuadas: se promueve las ideas. “No existen las fracciones impropias”, “Las fracciones son números no medidas”, “el todo o unidad no es un número”.
2. Se obstaculiza la separación conceptual del número racional y del número natural: se apoya las ideas incorrectas, “la fracción esta formada por dos números naturales”, “las relaciones y operaciones con números racionales tienen el mismo significado que en los números naturales”.
3. Se obstaculiza la formación de ideas abstractas; los alumnos desarrollan creencias como las siguientes: “Los conceptos son las técnicas asociadas a los mismos” y “Los contenidos útiles son los procedimientos”.

Escolano y Gairin en la segunda parte del artículo plantean una propuesta pedagógica alternativa de la enseñanza del número racional. El objetivo de la propuesta es favorecer la construcción de concepciones adecuadas, potenciar la idea del número racional y facilitar la construcción de ideas abstractas, que los “escolares integren los diferentes significados de número racional, así como los sistemas de representación asociados, y que se evite la exclusividad de alguno de ellos puesto que cualquiera de los significados destaca alguno de los aspectos del numero racional mientras que oscurece a otros” Figueras (1988) citado por Escolano y Gairín (2005,

p. 26) . El modelo establece una secuencia de tres momentos: en cuarto grado, (10 años) se enseñará los modelos de medida; en quinto (11 años), los modelos de cociente; y en sexto (12 años), los modelos de razón.

Los resultados de la propuesta pedagógica fueron alentadores; desaparición de los obstáculos epistemológicos; además los alumnos perciben que la fenomenología asociada a la fracción difiere sustancialmente de la del número natural. Entre las desventajas de la propuesta está que el aprendizaje es más dilatada en el tiempo por que se retraza la introducción de la representación simbólica de la fracción.

2.4.2.3 Enseñanza del número racional positivo en educación primaria

Según Escolano (2001) el aprendizaje de los números racionales presenta dificultades por la desconexión entre los sistemas de representación fraccional y decimal; deficiencias del conocimiento conceptual de los racionales y los procedimientos manipulativos de los símbolos, y la priorización del significado de la fracción como parte-todo, que destaca solo algunos aspectos y oculta otros, y se descuida otros significados como operador, medida, cociente o razón.

El objetivo del estudio es explorar las potencialidades y limitaciones de la propuesta didáctica que excluye el significado de la fracción como parte–todo y enfatiza los significados propios de la fenomenología del racional como medida y reparto. La hipótesis es que este medio didáctico favorece la comprensión de los números racionales. Los objetivos específicos son:

1. Conceptualizar la fracción con significado de medida de cantidades de magnitud (longitud, peso, superficie y cardinalidad).
2. Dar significado y justificar desde los modelos de medida las operaciones básicas.
3. Conceptualizar la fracción como el resultado de un reparto.
4. Conectar los sistemas de representación fraccionaria y decimal.
5. Dar significado y justificar desde modelos de aprendizaje las relaciones y operaciones entre números racionales.

El marco teórico tiene tres orientaciones; las estructuras numéricas específicas, las funciones cognitivas y el estudio de problemas y situaciones que se abordan mediante estructuras numéricas, pero concretamente, se ocupa de la dimensión cognitiva. La noción de comprensión, los sistemas de representación y los modelos de aprendizaje. Asume la hipótesis de Kaput (1999) para alcanzar la comprensión es necesaria el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación.

La investigación es de tipo exploratorio e interpretativo enmarcado en el paradigma cualitativo. La innovación curricular se sustenta en la investigación acción empírica y diagnóstica de dos etapas, con un primer grupo natural de 4to grado y luego, con 5to grado de educación primaria de un colegio de Zaragoza durante los años 1999–2001.

El estudio concluye, primeramente, en que los estudiantes no intuyen la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida; segundo, se tiene dificultades para representar medidas fraccionales del peso; tercero, no se observó diferencias significativas en la comprensión cuando se manipula modelos de longitud y superficie; y cuarto, los alumnos con la ayuda de material manipulativo construyen con más facilidad, fracciones equivalentes.

Las conclusiones respecto al potencial de la propuesta didáctica señalan que el aprendizaje basado en magnitudes continuas (longitud y superficie), permitió a los educandos construir y evaluar semánticamente el sistema de representación fraccional y dar significados a las relaciones de equivalencia y orden; además las representaciones gráficas facilitan la transmisión entre las acciones realizadas con materiales manipulativos y las representaciones simbólicas.

2.4.2.4 El concepto de fracción en sus diferentes significados

Para Dos Santos (2005), el objetivo de su estudio es evaluar las concepciones de los profesores del concepto de número racional en su representación fraccionaria. El bajo desempeño en la resolución de situaciones con fracciones de los estudiantes sugiere plantear la hipótesis de que el desempeño de los alumnos tiene estrecha relación con las concepciones de sus profesores. El éxito de la enseñanza de las fracciones en sus diferentes significados, depende de la concepción que tenga el docente. Por esta razón la interrogante planteada fue: ¿es posible reconocer las concepciones de los profesores que enseñan en los 1° y 2° ciclo (polivalente) y 3° ciclo (especialista) de Enseñanza Fundamental respecto a los conceptos de fracción en sus diferentes significados?

El estudio se apoya en las teorías de los campos conceptuales de Vergnaud, investigaciones de Teresinha Nunes y la clasificación de significados de la fracción de Kieren (1988). Dos Santos asume cinco significados del número racional adhiriéndose a Kieren (1988) y Nunes et al. (2004): el número racional como número, parte–todo, medida (con cantidades intensivas y extensivas), cociente (una división) y como operador multiplicativo.

La investigación diagnóstica es de tipo cualitativo observa, interpreta y analiza los trabajos producidos por los docentes, relacionados con sus concepciones del concepto de número racional. La naturaleza de los datos permitió una metodología cuantitativa / cualitativa para la presentación de los resultados.

El método de análisis de Bardin, citado por Dos Santos (2005), le permitió comprender críticamente el significado contenido en las producciones del sujeto, tanto desde el punto de vista de su contenido manifiesto como de su contenido latente. El método parte del supuesto que el sujeto que proporciona datos es un seleccionador de información. El análisis de contenido posibilita la formulación de categorías de análisis a posteriori que emerge de la producción de resultados. La estrategia de recolección de datos constó de dos momentos; primero se solicitó a los profesores elaborar seis problemas referentes al concepto de fracción y en el segundo momento se solicitó que resolvieran los mismos problemas.

El universo de estudio fue el grupo de profesores de Enseñanza Fundamental de escuelas públicas de la ciudad de Sao Paulo, perteneciente a la zona Este menos favorecida económicamente y con serios problemas sociales. La muestra fue de 67 profesores.

Las conclusiones muestran que los problemas elaborados por los profesores, parten de situaciones próximas a la vida cotidiana; sin embargo, algunos problemas eran inconsistentes.

El significado de operador multiplicativo predomina, seguido del significado parte–todo. Se cree que dicha situación se debe a las recomendaciones contenidas en los Parámetros Curriculares Nacionales. El significado parte–todo está relacionado a cantidades continuas en tanto que el significado como operador multiplicativo está ligado a cantidades discretas. Los significados número y medida fueron los más desatendidos en la formulación de problemas por los docentes.

Respecto a los procedimientos y estrategias de resolución de los problemas, se constató que existe una tendencia a preferir procedimientos algorítmicos en la resolución de problemas del significado operador multiplicativo. En tanto que cuando se resuelve problemas de parte–todo se usa con mayor frecuencia las representaciones icónicas.

Finalmente, Dos Santos afirma que, los profesores polivalentes y especialistas con relación al concepto de fracción, en sus diferentes significados, sus concepciones son similares a pesar de pertenecer a espacios de formación profesional distinta pues los docentes especialistas han tenido una formación matemática. La explicación que ensaya es que las concepciones y saberes de los profesores se fundan en preconcepciones de enseñanza y aprendizaje y su historia de vida y principalmente de su historia escolar, es decir, en el tipo de tareas y actividades que desarrollaron en su época de aprendiz.

2.4.2.5 La fracción en la perspectiva del profesor de aula

Magina y Campos (2004) en su estudio tienen el objetivo de conocer los conceptos que profesores de 2º ciclo no especialistas en matemáticas tienen sobre fracción, a través de un análisis tanto de sus estrategias de enseñanza como de sus pronósticos sobre el desempeño de los alumnos y conocer el desempeño de alumnos de 3ro y 4ta serie al resolver problemas que involucra el contenido fracción.

Los presupuestos teóricos se fundan en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la teoría de Nunes y Bryant, 1997 y Nunes at al. 2005, Kieren (1975), quien fue el primero en considerar que los números racionales son constituidos por varios constructos y que la comprensión de la noción de número racional depende del entendimiento de estas diferentes interpretaciones. El mismo Kieren en 1980 explicita e identifica cinco significados básicos en el proceso de comprensión de los números racionales y son: parte–todo, cociente, medida, razón y operador. Citados por Magina et al. (1999)

El estudio se realizó en el universo de escuelas públicas de la ciudad de Sao Paulo. Se aplicó dos instrumentos de diagnóstico a 70 profesores y 131 alumnos. El cuestionario para profesores constó de 11 cuestiones que pretendía evaluar las estrategias de enseñanza y el otro para pronosticar sobre el desempeño de sus alumnos.

Las conclusiones más importantes a que arribaron son: primero, aunque los profesores, presentan conceptos adecuados de fracciones en la mayoría de las situaciones, sin embargo, se detectaron algunas confusiones entre representar numéricamente situaciones de fracciones y de razón. Segundo, se constató que la principal estrategia de enseñanza es el uso de diseños de material concreto con el objeto de facilitar la comprensión perceptualmente de los alumnos en detrimento del trabajo con las invariantes lógicas de las fracciones. Tercero, aparentemente los profesores no tienen claro los diferentes significados de la fracción, lo que los lleva a proponer situaciones de enseñanza limitados, restringiéndose a la percepción y al significado parte–todo, lo que a su vez los limita en la utilización adecuada de estrategias de enseñanza y poder auxiliar a sus alumnos a superar las falsas o imparciales concepciones sobre fracciones. Y, cuarto, de forma general el profesor tiende a sobre estimar la capacidad de los alumnos de 4ta serie con relación a la 3ra serie.

2.4.2.6 Representaciones del número racional en la formación de profesores

Amorin, Flores y Moretti (2005) en el estudio parten del análisis de las actividades aplicadas a los alumnos de la disciplina optativa "seminarios de resolución de problemas" del 4º año de licenciatura en matemática del CEFET-PR/Unidad Sudoeste – Campus Pato Branco. El objetivo es estudiar elementos para una adecuada metodología que propicia la comprensión de la "adición y multiplicación de racionales", lo cual implica reflexionar sobre aspectos del funcionamiento cognitivo que considere las peculiaridades de las actividades matemáticas.

Las actividades propuestas a los estudiantes se fundamenta en la teoría de Duval con relación al aprendizaje de la matemática. Así en las resoluciones, se analiza los tipos de registro de representaciones del número racional que utiliza el resolutor: el registro simbólico, el registro figural y el registro del lenguaje natural. Se ha solicitado a los alumnos que resuelvan los problemas, explicando los procedimientos y estrategias que utilizan en forma detallada. Esto permitió identificar los procesos heurísticos de los alumnos.

Finalmente, en la solución de las cuestiones se observó que los alumnos utilizan diferentes representaciones como la figural, fraccional y hasta decimal; esto posibilitó activar diversos funcionamientos cognitivos como la transformación dentro del registro fraccional y las conversiones de presentación decimal a fraccional. Este tipo de funcionamiento cognitivo debe promoverse en la enseñanza de la matemática para una adecuada conceptualización de un objeto matemático, como es el caso de los números racionales.

2.4.2.7 Aprender a enseñar, representación del número racional

Llinares y Sánchez (1997) en el estudio analizan las características de la comprensión de las fracciones y números racionales en estudiantes de formación magisterial de educación primaria. Plantean una doble relación, primero, la forma en que comprende una noción matemática determina el tipo de tareas y representaciones que usa en la enseñanza; y segundo, estudiar si una determinada representación puede ampliar la comprensión del conocimiento matemático.

La investigación tuvo como objetivo particular, "analizar las características de la forma de comprender los contenidos matemáticos de la Enseñanza Primaria que dichos estudiantes traían al programa de formación y cómo esas características influyen en lo que se aprende" (Llinares y Sánchez, 1997, p. 15). La finalidad fue caracterizar el conocimiento pedagógico y los factores que influyen en su generación y desarrollo, contextualizado en el dominio de las fracciones y números racionales. El análisis se centra en el conocimiento que sobre las fracciones poseen los estudiantes para profesor de primaria, con relación al uso de diferentes sistemas de representación.

La problemática se traduce en las siguientes interrogantes: ¿cuáles son las características de la conexión de los símbolos matemáticos para las fracciones y los referentes gráficos o concretos?, ¿qué influencia ejerce el sistema de representación utilizado en la realización de diferentes tareas con fracciones? y ¿cuál es el origen del significado de los procesos de equivalencia y orden con las fracciones?

El estudio se fundamenta en la teoría de Hiebert (1988) sobre el desarrollo de la comprensión del significado de los símbolos y procedimientos matemáticos como esquema analítico para interpretar los datos.

El estudio se realizó en un grupo de estudiantes voluntarios de la Diplomatura de Magisterio. Los datos proceden de la aplicación de cuestionarios, entrevistas estructuradas y análisis con profundidad de casos.

Los resultados de sus indagaciones con relación a las características de la comprensión de la relación de equivalencia de fracciones fueron:

- Los estudiantes tienen dificultades entre la conexión de los referentes concretos con los procesos de obtención de fracciones equivalentes al nivel de símbolos.
- Se encontró dificultades en relación con los modos de representación y los símbolos al nivel de procedimientos. Esta dificulta se concretiza en que los estudiantes conocían procedimientos simbólicos para encontrar una fracción equivalente (a/b = ak/bk), pero tenían dificultades para traducir este proceso en un "nivel concreto".

- Los hallazgos referentes a los procedimientos en el ámbito de símbolos y su influencia en la comprensión de los números racionales, el significado que se atribuye a los símbolos matemáticos proceden en muchas ocasiones del nivel de formalización matemática, y está vinculado parcialmente al aspecto simbólico y manejo sintáctico.
- Los estudiantes para profesor respecto a la flexibilidad, entendida como la habilidad para cambiar el significado asociado a los conceptos matemáticos con relación a las características de la tarea y/o el sistema de representación utilizado, presentan dificultades de comprensión porque no es compatibles el significado dado a la fracción, las características de la representación y la tarea a realizar.
- Se observa dificultades en lo que Hierbert denominó la “traslación a la fuente del significado”, cuando no se puede representar en el nivel de lo concreto lo operado en el nivel de los símbolos. Cuando no existe esta traslación a la fuente del significado se imposibilita el pensamiento recurrente.
- La formalización matemática y la falta del proceso recurrente de comprensión imposibilita una comprensión del significado concreto, no visualizando la estrecha relación entre el nivel de formalización y los niveles interiores más intuitivos mostrando dificultades para modelar concreta y gráficamente.
- En conclusión el proceso de “folding back” permite realizar la integración de los significados que conlleva a una comprensión cabal del objeto matemático y la posibilidad de transitar entre diversas representaciones, utilizando diferentes significados implica la capacidad de flexibilidad del docente en formación.
- La caracterización de la comprensión de los estudiantes para profesor indica que la formación inicial de los profesores debe incidir en la influencia de los símbolos sobre la comprensión, el origen del significado de las reglas, y la flexibilidad del conocimiento para lograr una comprensión del objeto matemático.

- El docente en formación necesita conocer la función que desempeña los diferentes sistemas de representación y su uso para que los niños valoren adecuadamente la información y seleccionar la idoneidad de una representación frente a otra de los números racionales.

2.4.2.8 Sistemas de representación de números racionales positivos

Situado en un contexto de formación de maestro de educación primaria Gairín (1999) investiga el problema ¿de qué modo se puede modificar los conocimientos sobre los números racionales de los estudiantes para maestro? Los objetivos de la investigación que contempla la dimensión formativa son: primero, explorar dificultades y potencialidades que presenta el trabajo en los números racionales positivos para estudiantes de maestros de primaria, utilizando una propuesta didáctica; segundo, establecer relaciones entre los conocimientos de los futuros profesores sobre la propuesta didáctica y el desempeño de determinadas tareas como profesionales.

En la investigación se utilizan tres variables: modelo de aprendizaje, sistemas de representación y comprensión del conocimiento matemático. Para Gairín un modelo es un facilitador de la aprehensión sensorial de hechos y relaciones matemáticas mediante la manipulación. En este estudio se propone un modelo para dar significado a los números racionales positivos.

El estudio se sustenta en la teoría de la comprensión matemática de Hierbert y Carpenter (1992), los registros de representación semiótica de Duval. Usa las representaciones externas para caracterizar el grado de comprensión del estudiante. Según Gairín para un adecuado aprendizaje no sólo es suficiente manipular símbolos, sino también, implica interpretar situaciones matemáticas, cuantificar, visualizar, coordinar sistemas estructuralmente interesantes y, principalmente, utilizar un lenguaje especializado, símbolos, esquemas, gráficos y otros sistemas de representación.

Gairín pretende mejorar la comprensión de los números racionales positivos coordinando los sistemas de representación denominados polinómico unitario y polinómico decimal. El manejo de estas representaciones mejorara la comprensión del objeto matemático en cuestión.

La investigación se desarrolla en dos etapas: En la primera etapa se utiliza la metodología de la Investigación-acción. Ésta le permite reflexionar sobre la practica educativa y mejorar la comprensión del número racional a través de una indagación introspectiva colectiva. En la segunda etapa la metodología de la entrevista semiestructurada tuvo la finalidad determinar la utilidad de la propuesta de enseñanza sobre expresiones fraccionarias y decimales. Estas entrevistas permiten analizar cómo los futuros profesores resuelven trabajos profesionales de detección de errores y concepciones inadecuadas.

Como resultado se encontró que cuanto más débil es la comprensión del modelo por parte de los estudiantes más deficiente es la detección de los errores cometidos por los escolares. En tanto el estudiante tenga sólida comprensión mayor será las explicaciones que puede brindar a los escolares sobre el origen de los errores.

Los resultados confirmaron las hipótesis, la viabilidad de la propuesta didáctica incrementa las conexiones entre las notaciones fraccionarias y decimal de los números racionales positivos. En el proceso se ha observado que los docentes en formación son resistentes al tratamiento por que ellos están habituados a la aplicación de técnicas de cálculo antes que a la evaluación semántica de las expresiones matemáticas que manipula. De la misma forma respecto a la segunda hipótesis, se confirma la relación entre los conocimientos matemáticos que poseen los futuros maestros y su actuación profesional, en el sentido de que a un mayor y mejor dominio conceptual le corresponde una mayor competencia en determinadas tareas profesionales. Lo que significa que si los futuros profesores no tienen una buena comprensión del objeto matemático, tanto mayor será las deficiencias para detectar las dificultades que poseen los escolares.

2.4.2.9 Profesores y sus saberes de números fraccionarios

Ferreira (2005) entiende que las dificultades en el aprendizaje de los números fraccionarios están ligados a la formación profesional y práctica docente. Los objetivos de su investigación son: Observar las concepciones de números fraccionarios que los profesores movilizan cuando se proponen enseñar ese contenido a niños de 5ta serie, y buscar estrategias de formación que propicien ambientes de reflexión preparando acciones formativas, basados en una organización matemática que promueva el análisis didáctico de investigaciones sobre concepción de número fraccionario. Con estos objetivos pretende responder las interrogantes: ¿qué organización didáctica construyen los profesores para la enseñanza de números fraccionarios para la 5ta serie de Enseñanza Fundamental durante su formación? ¿es posible encaminar profesores de matemática a la reflexión que posibiliten cambios en las concepciones que tienen de sus alumnos proporcionándoles un nuevo lugar en las instituciones escolares?

Luego de una revisión histórica de la génesis del número racional, realiza un estudio epistemológico de los números fraccionarios que posibilite esquematizar una posible conceptuación de los números racionales. Ferreira (2005) en su estudio adopta el término de numero fraccionario para estudiar una clase de fracciones, a/b con $b \neq 0$ donde, el numerador y denominador pueden ser un número real o una expresión polinómica. Respecto a los significados, Ferreira discute una organización matemática de los números racionales para la formación docente en el cual, propone tareas asociadas a los cinco significados del número fraccionario como medida, cociente, razón, operador y parte-todo.

El estudio fue cualitativo, la base empírica se asoció a la acción de resolución del problema de enseñanza de números fraccionarios. El investigador y profesores participaron de modo cooperativo activamente y los profesores estuvieron involucrados en la elaboración de una secuencia didáctica para la enseñanza de fracciones. Esta metodología se apoya en las orientaciones de Thiolent (2003) citado por Ferreira (2005). El método permitió una mejor aproximación al problema central de la investigación y acceder a información que de otra manera hubiera sido difícil conseguir.

Los resultados revelan respecto a la primera interrogante que la organización matemática es rígida y se basa fundamentalmente en la concepción parte-todo en contextos de uso de superficies. Por otro lado, el concepto de razón es utilizado como sinónimo de división con predominio de la regla de tres simple, justificada por raciocinios algebraicos apoyados en nociones de proporcionalidad. Con relación a la segunda pregunta, se constató que el profesor puede mostrar considerables cambios en su concepción que tiene de sus alumnos, adoptando métodos de enseñanza flexibles e interactivos dando al alumno el papel de sujeto que aprende.

Al inicio los profesores creían que una revisión de contenidos sería suficiente para subsanar la falta de interés que impedía el nuevo aprendizaje. Pero durante el desarrollo del proyecto se observó cambios positivos de actitud tanto con relación a sus alumnos como al contenido. En algunos docentes se observó que en el proceso del proyecto posibilitaban un trabajo más autónomo a los estudiantes en la construcción de sus conocimientos.

2.4.3 El Número Racional en el Currículum Peruano

En este punto se realiza consideraciones sobre los estándares curriculares de *National Council of Teachers of Mathematics* y los dispositivos curriculares del sistema educativo peruano, concretamente revisamos los programas curriculares del curso o área de matemática con el objetivo de analizar la evolución del contenido matemático: Los números racionales en los programas de 1982 hasta la actualidad. Para esto se organiza un cuadro comparativo que identifica el dispositivo legal que dispone la implementación del programa curricular, se detalla los contenidos específicos del número racional, además se describe las capacidades, objetivos y pautas metodológicas que se pudo encontrar en estos documentos Anexo A.2.2. Al final se hace una recensión sobre la transposición didáctica de los elementos de la noosfera de Chevallard, que fundamenta la realización del análisis de los libros de texto de matemática.

2.4.3.1 Los estándares curriculares para el aprendizaje enseñanza de los números racionales

Los *Principios y Estándares para la Educación Matemática,* elaborado por la federación norteamericana de sociedades de profesores de matemática, el *National*

Council of Teachers of Mathematics (NCTM. 2000), describen lo que la enseñanza matemática debería lograr que los estudiantes conozcan y hagan. Así respecto a la enseñanza de los números racionales para etapa 6-8 que corresponde a la escolaridad de sexto de educación primaria, primero y segundo de secundaria del sistema educativo peruano, se propone como expectativa los siguientes:

- Trabajar flexiblemente con fracciones, decimales y porcentajes para resolver problemas.
- Comparar y ordenar fracciones, decimales y porcentajes con eficacia, y encontrar su situación aproximada en la recta numérica.
- Comprender y utilizar razones y proporciones para representar relaciones cuantitativas.
- Comprender el significado y los efectos de las operaciones aritméticas con fracciones.
- Utilizar las propiedades asociativa y conmutativa de la adición y la multiplicación, la distributividad de la multiplicación respecto a la adición, para simplificar cálculos con enteros, fracciones.
- Seleccionar y aplicar los métodos y herramientas apropiadas en cada situación para calcular con fracciones.
- Desarrollar y analizar algoritmos para calcular con fracciones y desarrollar fluidez con ellos.
- Desarrollar, analizar y explicar métodos para resolver problemas relacionados con las proporciones, como usar escalas y hallar razones equivalentes. (NCTM. 2000, p. 218)

En esta etapa de la escolaridad los alumnos deben ser hábiles en el trabajo con fracciones, el trabajo de enseñanza aprendizaje debe basarse en los conocimientos previos con las fracciones y experiencias de la vida diaria. La destreza con los números racionales debe alcanzarse conjuntamente con otros contenidos del currículo. La comprensión de los números racionales pasa por la manipulación de diferentes representaciones, ya sean pictóricas, gráficas en la recta numérica y simbólicas, tal como lo recomienda Duval (1995). Así, los estándares que establece son:

> Una sólida comprensión de las diferentes formas de representar las fracciones, los decimales y los porcentajes, es la esencia de la flexibilidad al trabajar con números racionales. En los niveles 3-5, los estudiantes debieron aprender a generar y reconocer formas equivalentes de fracciones, decimales y porcentajes, al menos en los casos sencillos. En los niveles medios, y con la base de estas experiencias, deberían llegar a ser diestros en el uso de las fracciones, los decimales y los porcentajes. (NCTM. 2000, p. 219)

En esta etapa de la escolaridad los estudiantes deberían de ampliar y consolidar su repertorio de significados, representaciones y usos del número racional positivo. Si bien el estudiante hasta ahora conoce los significados de la fracción como medida, cantidades, partes de un todo, localización en la recta numérica y división indicada, deberá también ser capaz de resolver problemas relativos a razones, tasas y operador. (NCTM. 2000).

2.4.3.2 Disposiciones curriculares oficiales del Sistema Educativo peruano

El Sistema Educativo peruano en las últimas décadas ha experimentado múltiples reformas, concretamente el Programa Curricular del Área de Matemática se ha modificado varias veces en los últimos veinte años. En este numeral se presenta una breve descripción histórica de los cambios en los planes de estudio de acuerdo a los documentos oficiales del Ministerio de Educación (M. E.).

En el siguiente cuadro se enumera los diferentes dispositivos curriculares que normaron el programa curricular del nivel de educación secundaria, específicamente el curso o área de matemática del primero y, en ocasiones, del segundo grado. Se detalla los contenidos específicos del tema *Los Números Racionales*, además, donde se pudo encontrar información, se describe las capacidades, objetivos y pautas metodológicas que proponen estos documentos.

Tabla 2.1

Diseños y Programas Curriculares del Contenido "Números Racionales"

Perú 1982-2005

Grado	Dispositivo Legal
Primero	R.M. Nº 0667-2005 Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular. Proceso de Articulación.
Primero	R. M. Nº 019-2004. Programa Estratégico Nacional de Desarrollo Curricular. Diseño Curricular Básico
Primero	Reconocido por el MED-2002 Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores. Una Nueva Secundaria
Primero y Segundo	Reconocido por el MED-2001 Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores (Adolescentes) Propuesta curricular experimental.
Primero	Resolución Ministerial Nº 0178-1993-ED. Programa Curricular del Primer Grado de Educación Secundaria de Menores.
Primero	Aprobado por el MED-1989. Programa de Matemática para el Primer Grado de Secundaria
Segundo	R.M. 0043-82-ED. Programa Curricular de Matemática

Las últimas propuestas curriculares parten de la concepción de educación como un proceso sociocultural permanente y sistemático dirigido al perfeccionamiento y realización del ser humano, buscando que en el proceso educativo se logre aprendizajes que desarrollen capacidades y actitudes. En este marco plantea la competencia: "Interpreta, formula y resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando técnicas y formulas al aplicar métodos apropiados que involucran datos y contraejemplos utilizando números racionales, desarrollando comunicación, razonamiento y conexiones matemáticas y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia". (M. E. Diseño Curricular, 2001, p. 57). En las Orientaciones Metodológicas se destaca la importancia de la matemática, no por la naturaleza de los objetos con los que se trabaja, sino las relaciones que puedan establecerse con dichos objetos. Y enfatiza que el aprender matemática significa entender y usar la matemática a través de la resolución de problemas, el hecho que un estudiante pueda memorizar fórmulas y aplicar algoritmos y técnicas de resolución de problemas y proporcionar respuestas correctas no implica comprensión matemática.

La matemática es una obra humana en permanente construcción, como resultado de un proceso histórico-cultural en el que los aspectos formales y deductivos corresponden a una faceta de ella. El aprendizaje de la matemática debe contribuir a la formación integral del educando desde las perspectivas cognitiva, instrumental, estético, lúdico, ético, cultural y principalmente comunicacional. La comunicación ayuda a los modos de argumentación, las distintas formas de expresión matemática – numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica y probabilística- ganando así el educando en precisión y rigor, se explica que el lenguaje matemático ayuda a los estudiantes a desarrollar sus habilidades para formular argumentar convincentemente y para interpretar y representar ideas matemáticas en forma verbal, gráfica o simbólica (M. E. Diseño Curricular, 2001).

El tratamiento de los números requiere una comprensión y tratamiento más amplio, que no puede limitarse únicamente al dominio de las operaciones básicas y las destrezas operatorias con expresiones algebraicas. Actualmente los educandos tienen que tener la capacidad de interpretar los números, razonar con conjuntos de variables interrelacionadas, y de crear e interpretar de manera crítica métodos para modelizar los fenómenos. Será necesario desarrollar capacidades para identificar relaciones críticas en situaciones nuevas y expresarlas en una forma simbólica eficaz. Las habilidades requeridas para describir e interpretar información cuantitativa estructurada, sacar inferencias y probar la plausibilidad de las conclusiones, se encuentran principalmente en la comprensión de las propiedades fundamentales de los sistemas numéricos y en la vinculación entre estos sistemas matemáticos y la vida real, así como en la generalización del razonamiento aritmético al álgebra. (M. E.. Diseño Curricular Básico 2002)

2.4.4 Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004

En la Evaluación Nacional de Rendimiento Estudiantil 2004, se exigió como nivel suficiente a los estudiantes del tercer grado el siguiente:

> Los estudiantes ubicados en este nivel resuelven situaciones problemáticas rutinarias y no rutinarias que demandan elaborar una secuencia de hasta tres operaciones aritméticas o utilizar la proporcionalidad directa con números racionales en su representación decimal.

> Estos estudiantes manejan adecuadamente las operaciones combinadas con números enteros respetando el orden jerárquico de dichas operaciones y se están iniciando en la comprensión de los números racionales. Unidad de Medición de la Calidad Secundaria del Ministerio de Educación (UMC. 2004, p. 52).

La prueba revela que los estudiantes presentan limitaciones en el cálculo de operaciones aritméticas combinadas con números naturales, enteros y racionales.

Las sugerencias metodológicas de la Unidad de Medición de la Calidad del Ministerio de Educación respecto a los números naturales es que, se debe trabajar "en primer lugar, con los racionales positivos, reforzando la equivalencia de las distintas representaciones: como fracción, como número decimal, como gráfico, o como porcentaje" (p. 92).

La UMC recomienda también, que a través de situaciones intra y extra matemáticas se debe hacer hincapié en situaciones problemáticas, en las propiedades de orden, densidad y relaciones de equivalencia. Además, la UMC recomienda desarrollar los siguientes significados: la fracción en sí como parte-todo, como cociente entre dos números (como una división indicada), como razón y finalmente, como operador (p. 92).

Asimismo, recomienda el uso de las representaciones gráficas con el objetivo de promover comprensión significativa de la noción y evitar el entrenamiento o aprendizaje memorístico.

2.4.5 Manuales de Difusión de la Matemática

En los textos de difusión de la matemática se encontraron diferentes orientaciones en la presentación del número racional. Así, en un texto del año 1980, se presenta la perspectiva de la Matemática Moderna por ejemplo:

> Introducción a la Teoría de Conjuntos de Oubiña (1974)
>
> "*El número racional.* Sea Z el conjunto de los números enteros y Z' el conjunto de ZxZ compuesto por los pares enteros (a, b) tales que $b \neq 0$. La relación en Z'

definida por $(a, b) \sim (c, d)$ si y solo si $a.d = b.c$, es una clase de equivalencia. Convendremos en designar con a/b a la clase de equivalencia del par $(a, b) \in Z'$. Por definición se llama "número racional" a cada clase de equivalencia de los elementos de Z'. Al conjunto cociente Z'/~ se lo designa con K se lo llama "conjunto de los números racionales" Oubiña. (1974, p. 132).

Si bien la matemática moderna incursiona en la escuela media junto con el 'slogan' de J. Dieudonné ¡Abajo Euclides! con la intención de criticar la enseñanza de la geometría axiomática al estilo iniciado por Euclides, ésta fue puesto al día por Hilbert, con un éxito casi inmediato en la educación universitaria, pero su incursión en la educación básica (secundaria) estuvo invadido de insuficiencias tanto desde la estructuración de los contenidos como desde la metodología que la asistía.

Frente al fracaso de la matemática moderna se alzaron diferentes propuestas pedagógicas para la enseñanza de las matemáticas, entre ellas esta el enfoque constructivista, cognitiva, social culturalista, etc. Sin embargo, cada uno de estas propuestas presenta limitaciones que se están cubriendo con el desarrollo de la disciplina científica Didáctica de la Matemática.

2.5 FENOMENOLOGÍA DEL NÚMERO RACIONAL

En este apartado presentamos información referente a la fenomenología del conocimiento matemático, en general, y del número racional, en particular. Se revisa la metodología y teorías desarrollados por Freudenthal (1993), Puig (1997), y Gallardo y Gonzales (2006). En una segunda parte, se revisa el conocimiento académico o saber sabio, Chevallard (1991) respecto al número racional, también, se hace una revisión del desarrollo histórico con la finalidad de comprender la fenomenología histórica que se adjudica a las fracciones.

2.5.1 Análisis Fenomenológico del Conocimiento Matemático

En este apartado se reseña la teoría sobre la fenomenología del conocimiento matemático desarrollado por Hans Freudenthal y su método. Asimismo, revisamos la perspectiva del análisis fenomenológico desde la visión de Luis Puig, además de discutir la naturaleza de la matemática como constitución de objetos mentales frente a la adquisición del concepto.

2.5.1.1 El método de Hans Freudenthal

Para Freundenthal (2001) la fenomenología es la antítesis entre el *noumenon* (contenidos o estructuras matemáticas, objeto de pensamiento) y el *phainomenon.* Es lo que se adquiere como categoría cuando tenemos experiencia de ellos. De este modo, los objetos matemáticos son *noumenon;* así por ejemplo, los números racionales pertenecen a ésta categoría, pero, los significados del numero racional son *phainomenon*.

Trabajar con los significados del número racional implica manejar conceptos, estructuras e ideas matemáticas; estos elementos organizan los fenómenos. Así una ilustración icónica de la fracción ½ ayuda a organizar el uso de los significados del número, en este caso como par ordenado (a, b) a, b Є Z x Z-{0}, o como el fenómeno de la medida, razón, contexto de reparto y operador, del numero racional se organiza mediante un par de números enteros como se aclaro más arriba. Así Freudenthal remarca "La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa en mi terminología, describir este *noumenon* en su relación con los *phainomena* para los cuales es el medio de organización" (p. 1).

Si se presta atención a cómo se adquiere la relación *noumenon* y *phainomenon* en un proceso de enseñanza aprendizaje entonces se estará hablando de la fenomenología didáctica de ese *noumenon* en tanto que la fenomenología genética está interesado en la observación de las relaciones en el proceso de crecimiento cognitivo.

Según recomendaciones de Freudenthal (2001) el material necesario para una fenomenología didáctica de los números racionales será:

1) El conocimiento matemático de los números racionales.
2) Sus aplicaciones.

3) Su historia.
4) Análisis de libros de texto.
5) La experiencia de los didactas en el desarrollo de los números racionales en la mente de los estudiantes.
6) Indagaciones sobre los procesos reales de la construcción de número racional y la adquisición de conceptos matemáticos relativo al objeto en cuestión.

Para Freudenthal la adquisición de conceptos y la constitución de objetos mentales son dos procesos distintos que tienen sus características particulares. Así, si se quiere estudiar el concepto de número racional de Bourbaki o Birkhoff y MacLane (1954), se intenta comprender qué es lo que estos autores tienen en mente cuando utilizan el concepto numero racional. En comparación con el concepto de números racionales que pueda manejar un estudiante de educación primaria o una comerciante de papas, interesará averiguar sobre lo que saben acerca de los números racionales y cómo lo utilizan. En esta descripción se percibe un doble significado de la palabra 'concepto'.

Si se desea que algún alumno de educación primaria tenga un concepto de número racional concebido, y si se enseña o se intenta enseñar el concepto de número racional como campo, se inculca este concepto. Es evidente que no se tendrá éxito. Por esta razón, se intentará materializar el concepto. Como señala Freudenthal deberá ser "embodied" (concretizar), es decir, "enseñar abstracciones haciéndolas concretas", y a pesar que el enseñante realice varios "embodiments" para alcanzar el objetivo, el concepto de número racional será muy pobre.

Para tener éxito Freudenthal propone que para enseñar el concepto de número racional en vez de comenzar por el concepto será preferible buscar fenómenos que puedan compeler al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo materializado por el concepto de número racional. En este sentido la fenomenología didáctica tiene la tarea de organizar los fenómenos ligados, en este caso, al número racional.

El autor aclara que la constitución de los objetos mentales antecede a la adquisición de conceptos; incluso, si no se llegara a la adquisición la constitución puede ser altamente efectivo duradero y definitivo. Se debe recordar que vemos los noumenon en primer lugar como objetos mentales y sólo secundariamente como concepto. La aproximación al conocimiento por adquisición de conceptos se inicia con la presentación del concepto y solo luego las aplicaciones. En tanto que la aproximación por constitución de objetos mentales se principia por la organización de los fenómenos y en seguida se construye el objeto mental, es decir, el concepto.

2.5.1.2 Análisis fenomenológico en la visión de Luis Puig

Según Puig (1997), el análisis fenomenológico se ocupa de la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática y consecuentemente de la naturaleza de la actividad para propiciar en el estudiante una genuina experiencia matemática.

La interpretación del análisis fenomenológico que realiza Puig tiene dos sentidos: primero, concierne a la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática promoviendo espacios de genuina experiencia matemática para el alumno; segundo, el análisis fenomenológico debe establecer los objetivos de la educación matemática y en expresión de Freudenthal es la constitución de objetos mentales versus la adquisición de conceptos.

El análisis fenomenológico de una estructura matemática es describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y establecer las relaciones entre la estructura y los fenómenos. En el análisis de los fenómenos se debe describir la totalidad de los fenómenos para los cuales es así, considerando los fenómenos para cuya organización fue creado al inicio y a qué fenómeno se extendió posteriormente. La descripción del concepto con los fenómenos debe exhibir la manera como actúa sobre el fenómeno como medio de organización y de que poder nos dota sobre ellos.

A diferencia de Freudenthal, Puig sustituye el término noúmenos por 'medio de organización', o sea la función de los conceptos cuando se considera en su relación con los fenómenos, y entiende que fenómeno es el objeto de la experiencia matemática. Los medios de organización de los fenómenos son tomado a su vez como objeto de experiencia, este par ‘fenómeno/medios de organización’ están en permanente interacción dinámica y se dan saltos de cambio, así los medios de organización de un par pasan a ser fenómenos del siguiente. Luego, hacer fenomenología es describir una de esas series o una de sus partes.

Según Freudenthal los tipos de fenomenología son cuatro:

- Fenomenología: Se trata de los fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado, momento y uso actual. Aquí los conceptos o las estructuras matemáticas se tratan como productos cognitivos.
- Fenomenología didáctica: Intervienen los fenómenos del mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza. Aquí los conceptos o estructuras matemáticas se tratan como procesos cognitivos.
- Fenomenología genética: Son los fenómenos relacionados al desarrollo cognitivo de los aprendices.
- Fenomenología histórica: Se estudia los fenómenos para cuya organización se creó el concepto y cómo se extendió a otros fenómenos.

La secuencia de los distintos tipos de análisis fenomenológico para describir una fenomenología didáctica, según Freudenthal, es la siguiente: fenomenología pura, histórica, didáctica y finalmente, fenomenología genética.

La naturaleza de la matemática

Los conceptos matemáticos son medios de organización de fenómenos del mundo. Como la tarea de la fenomenología es indagar, analizar los conceptos matemáticos y cuáles son los fenómenos que organiza, los fenómenos que consideramos en el análisis apenas si son del tipo que se trata a partir de los análisis concretos que realicemos; es decir, los fenómenos que son organizados por los conceptos matemáticos son fenómenos del mundo real, físico, cotidiano, sus propiedades, las acciones que se realiza sobre ellos y las propiedades de las acciones.

Los conceptos matemáticos no están en otro mundo, uno ideal, ni es anterior a la actividad matemática, estos se ubican en nuestro mundo de experiencias. Para

Freudenthal, en el proceso de creación de objetos matemáticos como medio de organización, estos se convierten en objetos que se sitúan en el campo de fenómeno.

Así, los objetos matemáticos se incorporan al mundo de las experiencias en el que entran como fenómeno en una nueva relación fenómenos / medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos y así este proceso se repite una y otra vez, (Puig. 1997). Este proceso iterativo de producción de objetos matemáticos se da cada vez en un nivel más abstracto. Estos conceptos matemáticos creados se ubican en el mundo de experiencias que se puede percibir a través de los sistemas de signos en que se expresan.

Puig distingue dos tipos de signos en los textos matemáticos; primero los "artificiales" o propios de la matemática; y segundo, los signos de alguna lengua vernácula. Pero lo importante no es esto, sino el estudio de los procesos de significación y producción de sentido. En consecuencia postula un determinado sistema de signos es decir un "sistema matemático de signos", ya que en este sistema matemático de signos muchos de ellos carecen de naturaleza lingüística. Puig no usa en su análisis la pareja 'significante/significado' como postula Sausssure, sino prefiere la propuesta de Eco o Barthes, por eso usa el par 'expresión/contenido' de un signo o una función semiótica del signo.

La interpretación del par 'expresión/contenido' del signo que hace Puig es coherente con la relación fenómenos / medios de organización. "El signo que tiene un componente de expresión y contenido, se sitúa en la relación de ser la expresión de un contenido al que remite o que implica" (Puig, 1997, p. 68) así por ejemplo, una expresión primigenia esta compuesto de una expresión y un contenido.

Los sistemas matemáticos de signos además de permitir organizar los fenómenos creando los conceptos, también capacitan, permite realizar nuevas acciones sobre los objetos matemáticos, que son acciones matemáticas no arbitrarias. Estas acciones están sugeridos por los sistemas matemáticos de signos más abstractos, es decir, estos sistemas abren nuevas perspectivas de desarrollo matemático con capacidades cada vez más superiores.

Los conceptos matemáticos se crean en el proceso 'fenómeno/medios de organización', y estos no son inmutables, sino que se modifican como consecuencia de su uso y de los nuevos sistemas matemáticos de signos en que se describen.

Constitución de objetos mentales frente a adquisición de conceptos

Para Freudenthal desde la perspectiva de la didáctica, el objeto de la acción educativa matemática básica es la constitución de objetos mentales y solo después, de manera temporal y en importancia, la adquisición de conceptos, esto como consecuencia de considerar a las personas que aprenden y usan matemática primero y luego, la disciplina o conjunto de saberes, histórico, social y culturalmente establecidos.

Puig describe en términos semióticos las diferencias entre objeto mental y concepto tomando como pretexto el número racional.

El conjunto de contexto en que se usa el número racional, puede ser contexto de etiqueta (página 1 de 10 1/10), contexto de medida, contexto de comparación o de razón, contexto de reparto, contexto matemático o de operador, contexto de parte-todo. Este conjunto de contexto constituye el *campo semántico* de "número" formados por todos los significados culturalmente establecidos. El significado enciclopédico de número posibilita identificar el contexto en que se usa el número permitiendo al receptor del mensaje adoptar la *restricción semántica* que establece el contexto y así poder interpretar el mensaje de la forma correcta. El sujeto usuario del texto no se mueve en el conjunto enciclopédico sino tiene un *campo semántico personal*, a esto Freudenthal llama "objeto mental número".

La riqueza fenomenológica del número se logra cuando se supera los contextos de uso mundano de los números que se ubica en los niveles más bajos y se toma en consideración otros contextos como por ejemplo el contexto matemático. Los objetos mentales se constituyen en cadenas fenómenos / medios de organización alcanzando niveles de desarrollo cada vez superiores.

2.5.1.3 La visión fenomenológica en Gallardo (2004)

Gallardo (2004) entiende "por *análisis fenomenológico* de un conocimiento matemático a la descripción de todas las situaciones susceptibles de poder resolver con, o en las que tiene sentido utilizar, ese conocimiento matemático." (p. 150). En este sentido el análisis fenomenológico sería el análisis de las situaciones. Además, entiende por *situación* las tareas problemáticas surgidas de la experiencia a las que el estudiantes se enfrenta en diferentes contextos. Dado el objeto matemático las fracciones como número racional, el análisis situacional consistirá en determinar esa situaciones en las que el empleo del significado pertinente se hace legítimo y contribuye a la obtención de la solución.

2.5.2 Claves fenomenológicas del Número Racional

Puig (1997) señala que los conceptos de número natural, entero y racional son distintos; además, el objeto mental número se constituye para organizar fenómenos de naturaleza diversa. El conjunto de todos los usos posibles en los diferentes contextos compone el campo semántico de número y lo que un sujeto experimenta para constituir su propio objeto mental de 'número'. Puig sostiene que la adquisición de los conceptos de número sólo se logra a través de buenos objetos mentales y de recortes de ese campo semántico, y además estos objetos metales relativos al número se sigue desarrollando permanentemente. Así, por ejemplo, el número racional no sólo se usa en contextos de la vida cotidiana, percibidos por un niño, sino que también se pondrá en contacto en los siguientes niveles educativos, con otros contextos matematizados hasta llegar al concepto algebraico de número racional que se alcanza en la educación superior.

2.5.2.1 Fenomenología del número racional según Freudenthal

Una fracción es una expresión o representación de un número racional. Así varias expresiones fraccionarias (½, $\frac{2}{6}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{2+3}{5+5}$) representan al numero racional, el objeto matemático. Cada uno de estas expresiones fraccionarias como dice Freudenthal “tiene una vida propia”, las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional.

El término fracción evoca la fractura o quebramiento que hay. También se les llama números quebrados. En tanto que el número racional evoca la razón como proporción de medidas.

En el tratamiento de este capítulo 5 “Fracciones”, Freudenthal se propone el objetivo de presentar las fracciones en su completa riqueza fenomenología. En sus observaciones metodológicos se propone prestar atención al cien por ciento de los fenómenos y organizarlos demasiado sistemáticamente corriendo el riesgo de llegar a la simplificación con el consiguiente entorpecimiento de la tarea fenomenológica.

Para Freudenthal, las fracciones en el lenguaje cotidiano se presentan como:.

La fracción como fracturador

Se entiende la acción de dividir, fracturar en forma irreversible o reversible o meramente simbólico y que la igualdad de partes como requisito sea estimada al ojo o por tacto. Dentro de la tarea de dividir en partes iguales es relevante observar la comparación entre las porciones.

Las fracciones como comparador

Las fracciones sirven para comparar objetos que se separan uno de otro. La comparación se realiza de acuerdo con ciertos criterios directos e indirectos. Dentro de los modelos de comparación se pueden distinguir: modelo de la relación razón y modelo del operador razón.

2.5.3 Historia de la Fracciones

La revisión histórica sobre el origen de las fracciones explora los aportes de las culturas mesopotámica, egipcia, griega y otras quienes desarrollaron la idea de fracción unitaria. La introducción de las fracciones sexagesimales, la utilización de fracciones unitarias y sexagesimales por los griegos, además, del reconocimiento de las contribuciones de otras culturas como la china e hindú, permitieron cristalizar el concepto de número racional en la modernidad.

El concepto de número natural es el más antiguo que la humanidad conoció, sus orígenes se pierden en la oscuridad de la prehistoria. Mientras que las fracciones racionales, se desarrollaron relativamente más tarde, según los vestigios históricos data de dos mil años antes de la era cristiana. Su origen no obedece a causas sociales relacionados con los sistemas elaborados para los números enteros. Aparentemente en las sociedades primitivas no tenían necesidades de usar fracciones, (Boyer, 1996).

El concepto de fracción desarrollado a través de la historia, ha tenido que pasar miles de años para llegar a conceptuarlo con el nivel que hoy conocemos. Las fracciones se llamaron en un principio "rotos" y después "quebrados", esta última sustantivación aún hoy subsiste. Recientemente se ha añadido al denominador la terminación genérica *avos*.

2.5.3.1 Los babilónicos y la noción de fracción

La civilización babilónica de Mesopotamia reemplazó a las civilizaciones sumeria y acadia. Los babilonios heredaron el sistema de numeración de los sumerios y de los acadios. El sistema numérico de estos predecesores era de base 60, es decir, el sistema sexagesimal. Sin embargo, ni el sistema acadio ni el sumerio eran posicionales, el mérito de los babilonios fue indudablemente el logro en el desarrollo del sistema numérico posicional.

Los babilónicos usaron un sistema mixto en la lectura numérica (posicional y aditivo) y en la base 60 y 10. La base 60 dificultaba la memorización de las tablas y por ello editaron gran número de tablas. Los babilonios usaban un sistema de fracciones sexagesimales similar a nuestras fracciones decimales. Por ejemplo, si escribimos 0,125 entonces tenemos ${}^{1}/_{10} + {}^{2}/_{100} + {}^{5}/_{1000} = {}^{1}/_{8}$. Análogamente, la fracción sexagesimal babilónica 0;7,30 representaba ${}^{7}/_{60} + {}^{30}/_{3600}$, que en nuestra notación resulta también ${}^{1}/_{8}$.

Las fracciones eran utilizadas con frecuencia por los babilonios, porque aparecen diversos casos de fracciones de multa en el Código de Hamurabi (1694 a.C.), como también en el estudio de la astronomía, Ptolomeo de Alejandría en el año 150 explica, en su obra "El Almagesto", su preferencia por las fracciones sexagesimales antes que las fracciones utilizadas por los griegos.

2.5.3.2 Las fracciones en el antiguo Egipto

Henry Rhind, ciudadano inglés, adquirió en Luxor un largo papiro de más de cinco metros de longitud, que por versiones de los vendedores había sido encontrado en una estancia cercana al Rameseum.

El papiro Rhind es uno de los documentos más antiguos sobre matemática, tiene aproximadamente 4000 años, cuyos datos parecen indicar que esta copia corresponde a los años 1585-1542 a. C. durante el Segundo Período Intermedio. En su introducción el autor Ahmes, escribe lo siguiente:

> Razonamiento exacto para averiguar las cosas y el conocimiento de todas las cosas, misterios... todos los secretos. Este libro está escrito en el año real 33, mes 4 de Akhet, Rey del Bajo Egipto, Awserre, Vida dada, a partir de una copia antigua hecha en el año del Rey del Alto Egipto, Nymatre. El escriba Ahmose escribe esta copia.

Este documento refiere la costumbre egipcia de expresar toda fracción en una suma de fracciones de numerador uno. Así, la fracción ¾ se escribía como la suma de dos fracciones de numerador uno: ½ + ¼ . Los datos históricos permiten afirmar que los egipcios sólo sabían operar con fracciones de numerador uno, por esa razón se reducía únicamente a este tipo de fracción.

Al contar sólo con fracciones unitarias el escriba no necesitaba representar por escrito la fracción como un par de números, tal como hicieron los árabes con el 'número roto'. Para indicar que se estaba tratando de fracciones se dibujaba, en el sistema jeroglífico, el símbolo del 'ro', definido como 1/320 de heqat de grano, esto denota un significado preciso de la fracción. Bajo este símbolo se colocaba el denominador escrito del modo usual como tal cantidad numérica. Dentro de este esquema existían dos excepciones: la mitad tenía un símbolo propio, una especie de U inclinada. Algo similar sucede con el 2/3, la fracción excepcional, que mostraba o bien un símbolo de *ro* con dos palos desiguales debajo o el mismo símbolo atravesado por una U invertida con dos brazos desiguales.

2.5.3.3 Las fracciones en la cultura china

Según Carl B. Boyer, los chinos mucho más antes que los griegos y romanos ya conocían un sistema de numeración posicional y además podían hacer cálculos con fracciones.

> No podemos considerar completa nuestra descripción del sistema de numeración chino sin hacer referencia al uso de las fracciones. Los chinos conocían bien las operaciones con fracciones ordinarias, hasta el punto de que en ese contexto hallaban el mínimo común denominador de varias fracciones. Al igual que hacían en otras materias, también establecían aquí analogías con los distintos sexos, refiriéndose al numerador como "el hijo" y al denominador como "la madre"; el énfasis generalizado en toda la cultura china sobre los principios del *yin* y del *yang* (opuestos entre sí, especialmente en el sexo), hacia más fácil seguir las reglas para manipular fracciones. Boyer (1996, pp. 263 - 264)

El hecho histórico más importante de las fracciones chinas es su decimalización. Al igual que en la cultura babilónica los sistemas de medida básicamente sexagesimal produjeron un sistema de numeración posicional de base 60, de la misma manera los chinos desarrollaron "una idea directriz decimal en los pesos y medidas dio como resultado el que se impusiera el hábito decimal en el manejo de las fracciones, que puede rastrearse, según se dice, tan lejos en el tiempo como el siglo XIV a. C." (Boyer, 1996, p. 264)

2.5.3.4 Las fracciones en la cultura griega

Según Boyer (1996), es probable que los griegos se nutrieran de los aportes matemáticos egipcios, los griegos adoptaron las fracciones unitarias para legarlo a los romanos. Mientras que los babilonios y egipcios incluyeron los números enteros y fraccionarios en el dominio numérico, en Grecia la palabra número se aplicaba sólo a los números enteros positivos. Boyer apunta "A las fracciones no se las consideraba como entidades únicas, sino como una razón o relación entre dos números enteros" (p. 83), esta forma de concebir las fracciones es más parecida a la matemática "moderna". Euclides escribe en los *Elementos* (V.3), "Una razón es una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo" (p. 83); de acuerdo con Boyer la noción "razón" centrada en la conexión entre pares de números, tiende a poner el énfasis en los aspectos racionales o teóricos del concepto de número y no en el papel del número como herramienta para el cálculo o para la aproximación en la medida.

De acuerdo con Whitehead (1944), los griegos consideran las fracciones en su significado de razón. Así, un griego sostendría que una línea de dos metros de longitud, guarda relación a una línea de tres metros, una razón de 2 a 3; lo que actualmente diríamos que, una línea es los dos tercios de la otra en longitud, y consideraríamos a los dos tercios como un multiplicador numérico.

2.5.3.5 Las fracciones en el mundo árabe, el caso de Al-Kashi

Al-Kashi (ca. 1436) en Samarcanda, hizo construir Ulugh Beg un observatorio astronómico. Desde allí Al-Kashi desarrolló la matemática que escribió, tanto en árabe como en persa, mostrando exactitud en el cálculo. Fue el primero en utilizar las fracciones decimales en el cálculo de muchas cifras exactas. Pero para el cálculo sistemático de raíces continuas utilizó las fracciones sexagesimales. Se cree que adoptó los aporte de los chinos para su práctica de utilización de fracciones decimales. Al-Kashi es un personaje histórico de la matemática, muy importante en la difusión de las fracciones decimales.

2.5.3.6 El Liber Abaci de Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa (1180-1250), conocido como Fibonacci vivió en una época de disputa entre algoritmistas y abacistas. En ese contexto escribe el *Liber Abaci* (libro del ábaco) un tratado de problemas algebraicos, en él se difunden los numerales hindú-arábigos, describe las nueve formas hindúes, junto con el signo 0 que en árabe se llama "zephirum". En el *Liber Abaci*, Fibonacci utiliza la barra horizontal en la notación de las fracciones, claro que ésta ya se usaba en Arabia, pero sólo llegó a generalizarse en el siglo XVI.

Fibonacci, en la explicación de procesos algorítmicos para la solución de problemas de transacción comercial, utilizó un complicado sistema de fracciones al calcular los cambios de moneda. El tipo de fracciones utilizadas por Fibonacci son las fracciones comunes, sexagesimales y unitarias, pero nunca decimales. De estas tres prefería las fracciones comunes y unitarias.

2.5.3.7 François Viète en la Europa Occidental

François Viète (1540-1603), su aporte en aritmética se debe a la defensa del uso de las fracciones decimales en vez de las sexagesimales. En su obra *Canon-mathematicus* de 1579:

> Los sexagesimales y los sesenta han de ser usados raramente o nunca en la matemática, mientras que los milésimos y los miles, los centésimos y los cientos, los décimos y los dieces, y las progresiones semejantes, ascendentes y descendentes, deben usarse frecuente y aun exclusivamente. (En Boyer 1996, p. 386).

2.5.3.8 Simón Stevin y la popularización de las fracciones decimales

Simón Stevin de Brujas (1585), hace una propuesta consistente a favor de las fracciones decimales, el uso de la escala de base 10 para las fracciones, lo mismo que para los enteros. Si bien las fracciones decimales tienen sus primeros vestigios en la antigua China, Arabia medieval y Europa renacentistas, Stevin, a través de su libro *De Thiende* (o "El décimo") popularizó las fracciones decimales entre la gente corriente y los matemáticos que se ocupaban de trabajos prácticos. Stevin se propuso la tarea de enseñar a todo el mundo, con detalle y de manera muy elemental, los cálculos necesarios de la vida diaria por medio de enteros sin fracciones, análogamente a la forma de medir el tiempo en minutos y segundos.

2.5.3.9 La organización de los pueblos a partir del S. XVI

En la era de la industrialización de los metales y la textilería, época en que las primeras máquinas daban lugar a una gran producción además de los primeros bancos; los cálculos eran necesarios para todos los ciudadanos. Pero no se podía enseñar a todos el manejo de las fracciones, ni se podía pretender en esos tiempos, que el más simple empleado supiese verificar la exactitud de su paga al final de su jornada, debiendo hacer cálculos con una moneda, cuyo submúltiplo era el sueldo y el dinero que recibía era una fracción de éste. Surge así la necesidad cotidiana del número decimal.

2.5.4 Conocimiento Académico del Número Racional

En este apartado hacemos una revisión de libros que tienen título de álgebra, álgebra moderna, álgebra abstracta y otros con la finalidad de hacer una revisión del concepto de números racionales desde el saber académico.

2.5.4.1 Introducción de los números racionales

Así como los enteros surgen de la necesidad de dar solución a la ecuación, $b+x=a$, cuando a es menor que b; de la misma manera, se determina el conjunto de los números racionales de la necesidad de encontrar solución a la ecuación $bx=a$, cuando a y b son enteros con $b \neq 0$. A estos los llamaremos "números racionales" ya que se escribe como "razón". (Burton, 1969)

2.5.4.2 Los números racionales como campo

Los enteros solos no forman un campo; la construcción de los números racionales a partir de los enteros es esencialmente la construcción de un campo que contenga a los enteros. Naturalmente, este campo deberá, además, contener las soluciones a todas las ecuaciones *bx=a* con coeficiente enteros *a* y $b \neq 0$. Este conjunto que satisfaga estas necesidades se consigue, introduciendo "*ciertos símbolos*" nuevos *r=(a, b),* a los que se llamará *pares*, estos pares se pueden sumar multiplicar e igualar exactamente como los cocientes *a/b* en un campo. (Birkhoff y MacLane, 1954).

Teorema: El conjunto ***Q*** de números racionales está constituido por todos los pares (*a, b*) de enteros *a* y $b \neq 0$. (p. 48)

Teorema: El conjunto ***Q*** de números racionales *r*, construido por pares de enteros, es un dominio de integridad en el que cada ecuación *rx=1* con $r \neq 0$ tiene una solución *x* en ***Q***. (p. 49)

Para Herstein (1974) el conjunto de los números racionales es "el campo Q de los números racionales que consiste de todas las fracciones formadas con enteros; es decir, todos los cocientes m/n, donde m, n≠0 estan en Z". (p. 171). Además, "Sea D un dominio integral y $S = \{(a,b)/a,b \in D, b \neq 0\}$; de manera que S es el subconjunto de DxD –el producto cartesiano de D consigo mismo- en el que no se permite que la segunda componente sea cero". (p. 171).

El cuerpo de los racionales para Rojo **(**1986) se define así:

Consideramos: $ZxZ^* = \{(a,b)/a \in Z \wedge b \in Z^*\}$ donde $Z^* = Z - \{0\}$ el conjunto de los enteros no nulos.

En $Z \times Z^*$ definimos la siguiente relación:

$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow ab'=ba'$

Esta relación es de equivalencia y verifica las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

Por el teorema fundamental de las relaciones de equivalencia existe una partición de $Z \times Z^*$ en clases de equivalencia, cada una de las cuales se llama número racional.

La clase de equivalencia de un elemento genérico *(a, b)* es

$K_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathrm{Z \times Z^*}/(\mathrm{x,y}) \sim (\mathrm{a,b})\}$

Se tiene $(x, y) \sim (a, b) \Rightarrow bx = ay$

En particular

$K_{(1,2)} = \{(x, y) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}^* / \mathrm{y} = 2\mathrm{x}\} = \{(x, 2x) / x \in Z^*\}$

donde x puede tomar todos los valores enteros no nulos, y resulta

$K_{(1,2)} = \{\ldots, (-2,-4), (-1,-2), (1,2), (2,4), (3,6), \ldots\ldots\}$

Es claro que, dado un elemento de ZxZ^* , sus equivalentes se obtienen multiplicando ambas componentes por todos los enteros distintos de cero.

Definición: Número racional es toda clase determinada por la relación de equivalencia definida en ZxZ^*.

Conjunto de los números racionales es el cociente de ZxZ^* por la relación de equivalencia: $Q = \frac{\mathrm{ZxZ}^*}{\sim}$. Rojo, A. **(**1986, p. 295)

2.6 COMPONENTES EPISTEMOLÓGICOS DEL NÚMERO RACIONAL

En este numeral se realiza una precisión de los términos concepto, significado, signo y una aproximación al termino 'fracción' desde el lenguaje español; seguidamente, se aclara la noción del concepto del aprendizaje contextual, para luego, discutir los diferentes significados que admite el número racional, específicamente su representante el número fraccional.

El componente epistemológico estudia la naturaleza del número racional desde la caracterización de sus significados en educación matemática y de la descripción de sus principales representaciones externas, caracterización que se sustenta en la teoría de los registros de representación semiótica de Duval. R. (1995).

2.6.1 Significados del Número Racional

2.6.1.1 Concepto, significado, signo[*]

Como en el estudio se usa los términos concepto, significados, acepción y signo, será necesario hacer algunas precisiones que ayuden a la comunicación escrita. De acuerdo al diccionario de la lengua española el término *concepto* es la representación simbólica de una idea abstracta y general. Tiene como sinónimos, significación o noción.

El vocablo *significado* es un adjetivo que denota lo conocido, importante, reputado, parte fundamental, junto al significante del concepto de signo lingüístico. Designa la idea o representación mental de lo nombrado, es decir, lo que se significa de algún modo. (Diccionario Océano, 2000). El termino es sinónimo de acepción, o sea, es el significado en que se toma una palabra o frase. En tanto que significación es el sentido de una palabra o frase, en la lingüística tradicional, equivale a significado, sentido, contenido semántico, etc., objeto que se significa.

El signo es la cosa que evoca en el entendimiento la idea de otra. Término con el que la moderna lingüística define la asociación de un significante y un significado. Asimismo, es una señal que se usa en los cálculos para indicar la naturaleza de las cantidades o las operaciones que se han de ejecutar con ellas.

El estudio del signo tiene su origen en Saussure. Éste presenta el signo lingüístico como una entidad psíquica que une un concepto (significado) y una imagen acústica (significante). Según él, el signo se caracteriza por su arbitrariedad, su necesidad y su inmotivación. Hjelmslev, del Círculo lingüístico de Copenhague, considera que el signo lingüístico se compone de tres infraestructuras; forma (fonología y fonética), función (sintaxis y morfología) y significación (semántica y lexicología).

---

[*] **Diccionario Enciclopédico Ilustrado** (2000) Océano UNO. Grupo Editorial Océano Barcelona España.

2.6.1.2 Aproximación conceptual al término "Fracción"

Según la Real Academia de la Lengua Española: fracción es "División de una cosa en partes. Cada una de las partes o porciones de un todo con relación a él". Matemáticamente es un "Número quebrado decimal, aquel cuyo denominador es la unidad seguida de ceros" (Diccionario Océano 2000).

Para mayor precisión es necesario hacer una distinción entre la palabra fracción y fragmento, este último se refiere absolutamente a las cosas, como por ejemplo, un fragmento de un libro. El fragmento es sustancia. En tanto la fracción es número, parte, división, la fracción está en la aritmética, en el cálculo. (Barcia 1944).

Roque Barcia precisa que la fracción es artificial: "supone cierta división estudiada, una operación hecha por nosotros; un algo que el objeto no tenía que nosotros se lo hemos dado" (p. 230). Al dividir un objeto en tres partes, el objeto es la unidad que la dividimos en tres partes. Cada parte es una fracción de la unidad, o lo que a ello equivale, que cada una de las tres porciones es una fracción del objeto, el término fracción indefectiblemente nos refiere a la idea de división.

Las acepciones anteriores de fracción hacen referencia a la correspondencia de *división de un todo* con el termino *fracción*. Pero lo que llama la atención es que cada uno descuida un aspecto de relevancia capital: la *división del todo en partes iguales.*

A continuación veamos lo que presenta el Diccionario de Términos Matemáticos. Para García (1992), la palabra fracción viene del latín "*fractio fractionis*", que significa "romper", "cosa rota", "fracción indica que una unidad se ha hecho el número de partes iguales que indica el denominador, y de ellas se han tomado las que indica el numerador". Es interesante remarcar que la palabra fracción es entendida como una división "no efectuada o que no se puede efectuar" o parte o porción de un todo, como "cociente indicado entre dos números enteros a y b, de los que el segundo debe ser distinto de cero"(p. 75).

De la revisión terminológica de la expresión 'fracción' en los diccionarios, se desprende que está relacionado al significado de parte-todo y la acepción de cociente.

2.6.1.3 Contexto y significados del número racional

Para Vergnaud (1987) el contexto es entendido como una situación problemática o un fenómeno que da sentido a un concepto. Para Vygotsky, 1962, el contexto es importante para la enseñanza y el aprendizaje de cualquier contenido, y debe tenerse en cuenta la influencia de el contexto. En Educación Matemática, Roth (1996) plantea tres diferentes sentidos para el término "contexto":

Primero, los problemas de matemática poseen un texto. Se refiere a todo conocimiento adicional necesario para la comprensión del problema matemático. La interpretación del problema matemático y del texto va depender de la experiencia y conocimientos previos que tenga el individuo.

Segundo, se refiere a algunos fenómenos del mundo, que pueden ser modelados de una forma matemática particular. Cuando los estudiantes se apropian significativamente del concepto en relación con un fenómeno, este puede ser considerado el contexto que intervino en la elaboración del significado del concepto.

Tercera, el contexto está ligado a la noción de ambientes y situación. Son constituyentes del contexto situaciones sociales, físicos, históricos, espaciales y temporales que forman la base para las actividades de aprendizaje.

En nuestro estudio adoptamos el concepto de contexto de Roth. Sobre todo se usa la palabra contexto siempre que se refiere a fenómenos, lugares físicos (ambientes), la situación problemática o situaciones diversas que incluyan prácticas matemáticas. Examinar el "contexto" es fundamental para la investigación, ya que a partir de él se plantea algunas interpretaciones del comportamiento en el aprendizaje y comprensión de los significados del número racional. El "contexto" está estrictamente relacionado con el estudio de los significados de las fracciones que se presenta en diferentes situaciones problemáticas, así se tiene los "contextos de medida", o "contexto algorítmico cuando se entiende la fracción como operador" o "contexto de reparto o cociente" y los problemas enmarcados en el "contexto de razón".

2.6.2 Los Significados de la Fracciones en la Educación Secundaria

Para Gairín y Sancho (2002), los números tienen una importancia social y cultural, así su inclusión en el currículo de matemáticas de la educación escolar primaria y secundaria es debido a su "interés fenomenológico y conceptual". la construcción del concepto de número racional cognitivamente es un proceso largo de articulación integral de conocimientos, conceptos, nociones y significados que se enumera seguidamente:

- Dominio del sistema de números naturales.
- Comprensión del dominio integridad de los números enteros.
- Introducción de nueva especialidades simbólicas.
- Operaciones y propiedades (clase de equivalencia entre otros).
- Representaciones que hay que acomodar a una variedad de nuevos significados.
- Estudian las relaciones entre los sistemas de representación.
- Comprender la estructura algebraica de grupo multiplicativo, lo que implica dotar de significado al inverso de un número.
- Comprender la noción topológica de densidad de los racionales.

Enunciar la definición de los números racionales como una estructura algebraica campo o cuerpo donde la fracción $a/b \in Q$ y $a, b \in Z$, cuando $b \neq 0$; no siempre denota una comprensión integral del número racional. Si no, es necesario analizar los diferentes significados que entraña una fracción como representante del número racional.

En opinión de Gairín, J, Sancho el número racional tienen los significados como "parte-todo", "cociente", "medida", "razón" y "como operador". Aparentemente, el significado parte-todo esta omnipresente en los demás significados. Posiblemente por esta razón la interpretación parte-todo se utiliza para la introducción de la noción de número fraccional en el aula. Como se constata en los textos escolares y anteriores investigaciones, el aprendizaje casi exclusivo de la interpretación parte-todo puede convertirse en una obstáculo para un posterior aprendizaje de los demás significados. Esto se producirá siempre que se priorice esta interpretación en detrimento de los demás.

2.6.2.1 Significados del número racional en su representación fraccional

Las diferentes investigaciones (Berh, et al., 1983; Kerslaske, 1986; Lesh, et al., 1983; Kieren, 1976 y Dienes, 1972) que cita Llinares y Sánchez (1988), concluyen que para que el niño pueda conseguir una comprensión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con el concepto de fracción se debe plantear las secuencias de enseñanza de tal forma que proporcione a los niños la adecuada experiencia con la mayoría de sus interpretaciones. Este aprendizaje se logra en largos periodos de escolaridad, así se tiene su presencia desde el segundo ciclo de educación primaria (9 años) hasta el primer grado de educación secundaria (12 años) en forma explícita como contenido a ser tratado en el aula; pero, eso no implica que luego se la deja de estudiar, mas aún, se sigue utilizando la noción de fracción durante la educación secundaria en el estudio de otros contenidos.

La identificación y caracterización de los contextos que hacen significativa la noción de fracción, las interpretaciones principales de los significados del número racional que realiza Gairin y Sancho (2002) y Llinares y Sánchez (1988) en base a los trabajos de T. Kieren (1976), Behr, et al. (1983), Dickson, et al. (1984) y son:

1. Significado Parte-Todo

Este significado se da cuando existe la división de una unidad en partes iguales de las que se “destacan” algunas. Las partes en que se ha dividido la unidad lo indica el denominador de la fracción, mientras que las partes que se destacan están indicadas por el numerador. La relación “parte-todo” se presenta cuando un “todo”, continuo o discreto, se divide en partes “congruentes”. La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes. El todo recibe el nombre de unidad. Gairín y Sancho (2002). En esta interpretación la expresión *a/b* representante la situación en que un todo o unidad se ha dividido en *b* partes iguales de las que se consideran *a* de dichas partes.

Cuando se ubica fracciones en la recta numérica a la fracción a/b se le asocia un punto situado sobre ella, aquí implícitamente se realiza la asociación de un punto con una fracción, donde cada segmento unidad se divide en *"b"* partes (o en un múltiplo de *b*) congruentes, de las que se toma *"a"*. También se puede considerar como un caso particular de la relación parte-todo.

2. La fracción como cociente.

El número racional como "cociente", *a/b* representa una situación de reparto, en la que se trata de conocer el tamaño de cada una de las partes que resulta de distribuir *a* unidades en *b* partes iguales. (Gairín y Sancho 2002)

Bajo esta interpretación se asocia la fracción a la operación de dividir un número natural por otro distinto de cero (división indicada *a/b*), o bien, dividir una cantidad en un número de partes dadas en un contexto de reparto. Kieren (1980) "señala la diferencia entre la interpretación parte-todo con la de cociente; Indica que, para el alumno que está aprendiendo a trabajar con fracciones, el dividir una unidad en cinco partes y tomar tres (3/5) resulta muy distinto del hecho de dividir tres unidades entre cinco personas, aunque el resultado sea el mismo".

Las situaciones de reparto se presentan en contextos de magnitudes continuas y discretas. A diferencia de la interpretación parte-todo, los alumnos realizan de mejor manera las reparticiones en contextos discretos que en contextos continuos. Esto siempre que el numerador sea múltiplo del denominador. Caso contrario se "torna" una situación de contexto discreto en continuo.

Esta interpretación sirve para introducir los números racionales con rango de "número" y romper el concepto de que solo los naturales son números. En esta interpretación se considera que las fracciones tienen un doble aspecto; primero, se distingue la fracción como una división indicada; y segundo, como elemento de un cuerpo cociente. Se considera las fracciones como los elementos de una estructura algebraica, es decir, como elementos de un conjunto numérico $Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z, b \in Z - \{0\} \right\}$ que representa la solución de la ecuación b . x = a . Según Kieren (1975) "esta interpretación de las fracciones (números racionales) como elemento de un cuerpo (estructura algebraica) no ésta estrechamente vinculado al pensamiento natural del niño al desarrollarse de forma deductiva las operaciones y propiedades".

3. Las fracciones en la medición

Según Bishop (1999) medir es una actividad "universal" e importante para el desarrollo de ideas matemáticas y se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia. Así la medida de cantidades de magnitud es una actividad importante, tanto así que este universo originó los números racionales.

Este significado surge cuando al medir una longitud la unidad no cabe un número entero de veces en ella, ésta puede fraccionarse para obtener una medida más precisa. La necesidad de fraccionar la unidad de medida permitió la emergencia natural del significado parte-todo, la unidad de medida debía ser dividida en sub unidades de medida para garantizar la realización. Esta acepción es consecuencia de la necesidad de medir longitud, superficie, cardinalidad, peso y comunicar las medidas. La fracción *a/b* indica fraccionar la unidad de medida en *b* sub-unidades iguales y que es necesario colocar *a* sub-unidades, reiteradas veces, para completar la cantidad de magnitud del objeto a medir.

En esta situación el todo, sea continuo o discreto, se divide en partes "congruentes". La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes. La relación parte-todo es intrínseca a la interpretación de la fracción como medida. De los contextos continuo y discreto de la fracción como parte-todo la que presenta mayor dificultad es del contexto discreto, "se fuerza a que el niño amplíe su esquema de la relación parte-todo"

El número racional como “medida” plantea la necesidad de medir la longitud de un segmento AB tomando como unidad de medida la longitud de un segmento CD, que no está incluido un número entero de veces en el segmento AB. En términos generales se puede decir que la fracción como medida responde a la necesidad de medir una magnitud tomando como unidad de medida otra magnitud de la misma naturaleza que la anterior que no está incluido un número entero de veces en ella. El objeto a medir no siempre será una longitud, puede ser un área, el tiempo, masa, etc. (Gairín y Sancho 2002)

4. La fracción como razón

El número racional como “razón” a/b no representa la partición de ningún objeto o cantidad de magnitud, sino la relación que existe entre dos cantidades de magnitud, la comparación entre los cardinales de dos conjuntos, o la comparación entre una cantidad de magnitud y el cardinal de un conjunto. La comparación se establece entre las cantidades que expresan el numerador y el denominador y, por tanto, el orden en que se citan las magnitudes que se están comparando es esencial. La comparación entre cantidades que indica la fracción ha de entenderse como el tanto por uno, es decir, como la cantidad de la magnitud a que se refiere el numerador que corresponde a cada unidad de la magnitud considerada en el denominador (Gairín y Sancho 2002).

La fracción tiene significado de razón cuando lo que se simboliza con ella es la relación entre dos cantidades o conjuntos de unidades. En esa interpretación, la noción de par ordenado de números naturales toma mucha importancia. En una razón el primer elemento o sea el dividendo o numerador, se llama antecedente, y el segundo elemento, o sea el divisor o denominador se llama consecuente.

La fracción como índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud es una relación parte-parte o todo-todo, que se denota así a/b. En esta interpretación es importante fijarse en la bidireccionalidad de la comparación se puede leer: A es a/b respecto a B ó B es los b/a con relación a A. Luego podemos concluir que en la interpretación de la fracción como razón esta implícito la relación todo-todo o parte-

parte y en la frontera de la diferencia se puede comprar el todo con la parte o la parte con el todo como una razón.

5. Las fracciones como operadores

El significado de operador de la fracción permite que actúe sobre una situación, o estado inicial, para modificarla y conseguir un estado final. Por tanto, se puede interpretar a la fracción como una función de cambio. El trabajo con operadores conecta las fracciones con las propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos, y con propiedades del análisis como son los de composición de funciones. (Gairín y Sancho 2002.)

En esta interpretación la fracción actúa como un transformador, número que provoca cambios a través de una sucesión de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa. Esta interpretación puede ser relacionada a la noción de función. Ante la siguiente situación; "En el salón A de 36 alumnos 2/3 deben ser niñas. Y si en el salón B son 42, ¿cuántas niñas hay en cada salón?" se puede interpretar como la función: $f(x) = \frac{2}{3}x$.

La fracción como porcentaje, es un caso particular de la fracción como operador, así la relación que se establece entre un número y 100 recibe el nombre particular de porcentaje. Por regla general, los porcentajes tienen asignado un aspecto de 'operador', es decir, al interpretar 'el 40% de 25' se concibe 'actuando la fracción 40/100 sobre 25'.

2.6.2.2 Los Significados de la fracciones Castro, E. y Torralbo, M.

Para Castro y Torralbo (2001) los números tienen una importancia social y cultural, así, las fracciones son entes que se asocian a la acción de medir, objetos a los que se les puede dar tratamiento matemático. Las fracciones permiten la comparación de dos cantidades de magnitud y expresan con mayor exactitud la medida.

Según Castro y Torralbo (2001), una de las distintas interpretaciones de la fracción, de acuerdo a unos contextos es la relación parte-todo, este significado es el más intuitivo y más cercano a los niveles escolares en los que se introduce el concepto, y por eso es el medio más idóneo para introducir las fracciones en la escuela.

Otra interpretación es la fracción *a/b* como cociente de enteros, la división *a* entre *b*. Se origina cuando se tiene la necesidad de resolver la ecuación $b \cdot x = a$, donde *a* y *b* son primos entre sí. La representación $x = a/b$ permite representar una división, o reparto entre el numerador y el denominador.

El significado de razón denota la relación entre dos cantidades o conjunto de unidades. También se la conoce como la relación parte-parte, o se puede presentar la situación de comparación de todo-todo. En el uso del significado de razón de las fracciones es posible invertir el sentido de la comparación, por ejemplo, la relación de bolas negras y rojas es de 7 a 4 (7/4) ó la relación de bolas rojas y negras es de 4 a 7 (4/7), estas dos comparaciones son correctas.

El significado de la fracción como operador es un transformador cuando actúa sobre una situación o estado inicial, para modificarlo y conseguir un estado final. Esta modificación se realiza a través de la multiplicación de la cantidad de magnitud por el numerador y una división por el denominador.

2.6.2.3 Significados institucionales y personales de las fracciones

Gonzáles y Arrieche (2005), caracterizan los significados institucionales y personales de las fracciones en el contexto de la educación básica. Para ello parte de la interrogante ¿por qué los alumnos no adquieren las destrezas necesarias para consolidar el aprendizaje de las fracciones? y proponen el objetivo de determinar los significados institucionales y personales puestos en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones en la educación básica. Asumen el supuesto teórico que la enseñanza de las fracciones se basa principalmente en el fraccionamiento de la unidad y en la aplicación de las propiedades, en menoscabo de la variedad de situaciones que son consecuencia de los demás significados que puede atribuirse a las fracciones; significados de medida, razón, cociente y operador.

Otra base teórica se subsidia en el modelo teórico semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de la matemática de Godino y Batanero (1994). Según ésta el significado se concibe como el sistema de prácticas (operativos o discursivos) manifestados por una persona en el seno de una institución para resolver un campo de problemas matemáticos. Además de esta teoría se adopta la noción de objeto matemático de Godino (2003) y la noción de praxeología matemática que desarrollan Chevallard, Bosch y Gascón (1997).

Dentro de los significados institucionales y personales de la fracción se clasifican según Godino (2003) en tres:

1. Institucional, significados de referencia: información obtenida de los libros de texto, fuentes de filosofía e historia de la matemática
2. Institucional, significados implementados: conocimientos transmitidos por los profesores en el aula.
3. Significados declarados en el aspecto personal: conocimientos mostrados por los estudiantes en las respuestas a un examen.

2.6.3 Representaciones Matemáticas

En este subtítulo se reúne información sobre el concepto de representación, desde la perspectiva teórica de Raymond Duval (1995), además la orientación sociocultural de la representación (Radford 1999). En una segunda parte revisamos los conceptos de visualización y modelo de Castro et al. (1997), la imaginación (Skemp, 1980), los símbolos (Skemp 1980, Hiebert 1988) y algunos antecedentes e investigación que se hallaron sobre la representación del número racional.

2.6.3.1 Semántica del término representación

La revisión semántica de término “representación” bosqueja las siguientes significaciones: es la “imagen o idea que sustituye a la realidad” (Diccionario Océano UNO 2000), es “hacer presente una cosa con palabras o figuras. Ser imagen o símbolo de una cosa, o imitarla" (Diccionario Sopena 1977). En conclusión, representar es hacer presente una cosa de forma abreviada y simbólica gráfica. (García 1992). La representación es algo que mantiene una relación de representación con otra cosa. Rosental y Iudin (1995) en su Diccionario de Filosofía define la noción de representación en los siguientes términos.

> Imagen generalizada sensorialmente evidente de los objetos y fenómenos de la realidad; se conservan y reproducen en la conciencia sin que los propios objetos y fenómenos actúen directamente sobre los órganos de los sentidos. En la representación del ser humano, se fija y se conserva lo que objetivamente se convierte en patrimonio de los individuos gracias a la actividad práctica. Aunque es una forma del reflejo sensorial del individuo, la representación en el hombre se halla indisolublemente vinculada a significaciones socialmente elaboradas, es mediada por el lenguaje, está llena de contenido social y es siempre captada por el pensamiento, por la conciencia. La representación constituye un elemento necesario de la conciencia, pues vincula sin cesar la significación y el sentido (significación y sentido) de los conceptos con las imágenes de las cosas, a la vez que permite a la conciencia operar libremente con las imágenes sensoriales de los objetos (p. 401).

Ferrater (1985) distingue diferentes acepciones del término *representación* y considera cuatro sentidos:

1. La representación es la aprehensión de un objeto efectivamente presente. (percepción).
2. La representación es la reproducción en la conciencia de percepciones pasadas. ("representaciones de la memoria" o recuerdos).
3. La representación es la anticipación de acontecimientos futuros, a base de la libre combinación de percepciones pasadas.(imaginación).
4. La representación es la composición en la conciencia de varias percepciones no actuales. (se habla en este caso de imaginación y a veces de alucinación).

Desde la óptica psicológica, el Diccionario de Pedagogía y Psicología (1999) define la representación como:

Forma de estructurar la información almacenada en la memoria a largo plazo. Las representaciones son las estructuras del conocimiento que subyacen a los procesos cognitivos. Una representación es una imagen de una cosa o proceso en la conciencia humana independiente de la presencia corpórea de lo representado, que queda almacenado en la memoria de un individuo, a partir de una percepción previa. La representación implica una construcción de la realidad en términos conceptuales. Se asimila así el término de representación al término pensamiento y hace referencia a la capacidad de diferenciar y coordinar significantes y significados. Para Piaget, la representación constituye la capacidad de evocar, por medio de un signo o imagen simbólica, el objeto ausente o la acción aún no realizada. La representación comienza cuando hay simultáneamente diferenciación y coordinación entre significantes y significados" (p. 289).

2.6.3.2 Primeras aproximaciones a los sistemas de representación

Bruner (1984), ha distinguido tres tipos básicos mediante los cuales el hombre representa sus modelos mentales y la realidad. Primero, el sistema enactivo como procesos sensoriales y motores de los experimentos físicos; en este sistema las demostraciones se hacen mediante predicciones y experimentos. Este tipo de representación ocurre marcadamente en los primeros años de la persona. Segundo, el sistema icónico consiste en representar cosas mediante una imagen o esquema espacial independiente de la acción, corresponde a las experiencias visuales espaciales que incluyen las representaciones icónicas, el trazado e interpretación de gráficos y diagramas y los experimentos mentales; en este sistema se producen demostraciones visuales genéricos sobre imágenes concebidas como prototipos que no sólo representan un caso particular sino todos los de la misma clase. Y tercero, la representación simbólica, consiste en representar una cosa mediante un símbolo arbitrario que en su forma no guarda relación con la cosa representada, el sistema simbólico correspondiente a las descripciones de objetos y de relaciones entre objetos; en esta categoría se consideran las demostraciones euclidianas, definiciones de objetos, las deducciones de relaciones, las demostraciones formales.

2.6.3.3 Raymond Duval: sistemas de registros de representación

Desde el punto de vista de la semiótica, las representaciones son signos, códigos, tablas, gráficos, algoritmos y diseños. El signo es algo que nos transmite un significado, una expresión comunicativa verbal o escrita y hasta gestual. Para la semiótica, la relación entre el signo y el significado está mediado por un concepto.

Según Duval (1993), la necesidad de representaciones simbólicas para un objeto matemático se debe a que él no tiene existencia física y no es accesible directamente por los sentidos. En la dimensión psicológica el uso de diferentes representaciones está relacionado al funcionamiento cognitivo del pensamiento.

Las representaciones son esenciales para el desarrollo y comunicación del conocimiento matemático. Duval (1995), defiende tres nociones de representación que, aunque ellos son de la misma especie, realizan funciones diferentes y son: las "representaciones mentales", que tienen una función de objetivación, son internas y conscientes y ocurren en el pensamiento, estas representaciones internas son las imágenes mentales que consideran características figurativas o gráficas del concepto; las "representaciones computacionales", son internas y no conscientes del sujeto, funcionan en forma automática e instantánea. Se refiere a las tareas que el sujeto realiza sin reflexionar sobre los pasos necesarios para su realización, y las "representaciones semióticas", que realizan una función de objetivación y de expresión, son concientes y es relativo a un sistema particular de signos, como el lenguaje natural, matemático o gráfico, se refieren al mundo de las estructuras físicas y los sistemas de notación. Ellas tienen dos aspectos: la forma (representante) y el contenido (representado). Tienen doble carácter funcional; actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de las nuevas estructuras mentales y permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

Para el mismo autor, las representaciones internas y externas no pertenecen dominios diferentes, las representaciones internas se desarrollan como una interiorización de las representaciones externas, es decir, existe una mutua interacción desarrollista; a mayor diversidad de representaciones de un mismo objeto o concepto, corresponde mayor capacidad cognitiva, consiguientemente su capacidad de pensamiento sobre el concepto matemático, y además el sujeto usa representaciones externas para exteriorizar sus imágenes y representaciones mentales comunicándolas a los demás, es decir, las representaciones externas actúan como una suerte de radiografía de la comprensión del concepto que se sitúa en la mente del sujeto (1993).

Así mismo, sostiene que no se puede tener comprensión en matemática si no se distingue un objeto matemático de su representación (símbolos, signos, códigos,...). La confusión entre el objeto y su representación produce una perdida de comprensión.

Duval (1993, 1995), considera que la semiosis es la producción de una representación semiótica, en tanto, que la noesis implica aprehensión conceptual del objeto. La semiosis y la noesis movilizan diferentes actividades cognitivas que son analizadas en sus interacciones, la noesis es inseparable de la semiosis.

Para que ocurra la aprehensión de un objeto matemático, es necesario que la noesis (conceptualización) ocurra por medio de significantes semiosis (representación). La aprehensión conceptual de los objetos matemáticos solamente será posible con la coordinación de varios registros de representación. Esto significa que, cuanto mayor sea la movilidad entre registros de representación diferentes del mismo objeto matemático, mayor será la posibilidad de aprehensión del objeto matemático. "la coordinación de diferentes registros de representación es una condición necesaria para la comprensión" (Duval, 1995, p. 59).

Indica también, que las actividades cognitivas ligadas a la semiosis son: la formación, tratamiento y conversión. Sólo los dos primeros se consideran en la enseñanza. En el aprendizaje, el conflicto es que no se logra comprender, reconocer el mismo objeto matemático en cada uno de los diferentes sistemas semióticos de representación. Otra dificultad en la comprensión es que los alumnos no logran distinguir entre las actividades de tratamiento y conversión.

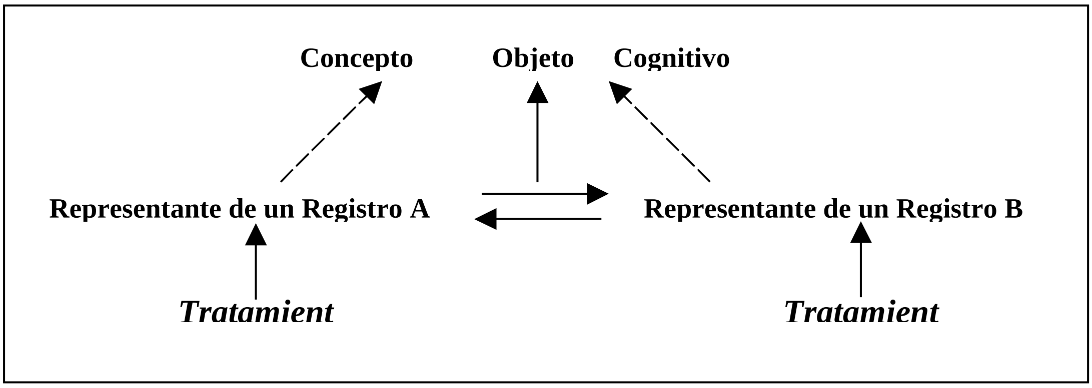
La formación de representaciones identificables como representación en un sistema dado, implica una selección de rasgos y datos en el contenido que se quiere representar. Da reglas para asegurar las condiciones de identificación y reconocimiento.

Por otra parte, considera la conversión de una representación, a la transformación de una representación en otro registro conservando la totalidad o una parte del contenido de la representación inicial. La actividad de conversión es muy importante y no es rutinaria en la actividad matemática, sino esta es cognitivamente activa y posibilitará la diferenciación entre representante y representado. Según Duval, manipular diversas representaciones de un mismo objeto matemático conlleva a beneficios de economía de tratamiento, complementariedad de registros y la conceptualización que implica la coordinación de los registros de representación Duval, (1993)

La economía el tratamiento permite superar los límites de una representación y la eficacia en la representación de las relaciones entre objetos. Así para ordenar fracciones de menor o mayor enunciados como pares ordenados en la forma a/b, se puede recurrir a la 'multiplicación en cruz' o representarlos en un sistema de ejes coordenados y por simple inspección se podrá ordenarlos.

La complementariedad de registros involucra los elementos informativos o comunicacionales que las representaciones hacen posible; por ejemplo, las ubicaciones de los racionales en la recta numérica puede representar, por ejemplo, la relación de orden o equivalencia, pero no permite efectuar operaciones. En tanto que la representación simbólica permitirá hacer transformaciones, manipular ciertos algoritmos operacionales. Cada representación distinta tiene la propiedad de transmitir una característica diferente del concepto matemático. Todas estas diferentes representaciones se complementan en la tarea de estudiar un concepto matemático. Ninguna representación es capaz de agotar en su totalidad la complejidad conceptual del objeto matemático. Cada representación destaca alguna propiedad del objeto matemático y dificulta la comprensión de otra.

Respecto a la conceptualización (Duval 1993) presenta un esquema del funcionamiento de la representación semiótica y la conceptualización.



Fuente: Duval, R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivos del pensamiento. Anales de Didáctica y de Ciencias Cognitivas, IREM de Strasbourg, n. 5, 37-65, 1993,p.51.

Figura 2.3 Funcionamiento de la representación semiótica

Este esquema explica la hipótesis de que la comprensión conceptual se produce por la coordinación de al menos dos registros de representación. Pero la conceptualización está generada por las transformaciones y las conversiones de un registro de representación a otro. Insistiendo, la conceptualización es el resultado de la coordinación de al menos dos tipos de representación y que estas coordinaciones deben necesariamente ser provocadas y estar en permanente alerta para distinguir entre representante y representado, además, evitar el enclaustramiento en un único registro de representación.

Según Duval (1995) la conversión que es tan necesaria para la conceptualización, implica encarar el problema de la congruencia y no congruencia entre las representaciones de un mismo objeto que se originan de sistemas semióticos diferentes. La observación de las congruencias y no congruencias ayudaran a explicar los sucesos y insucesos de los alumnos frente a las cuestiones que implican un cambio de sistemas semiótico de representación.

Se encuentra que los pasos de una representación a otra son casi espontáneos cuando las representaciones con congruentes. Duval (1995) enumera tres condiciones para que dos sistemas semióticos de representación sean congruentes:

a) Debe existir una correspondencia semántica entre unidades significantes que las constituyen.
b) Deben tener el mismo orden posible de percepción o aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones.
c) Conversión de una unidad significante de representación de partida a una sola unidad significante en la representación de llegada.

2.6.3.4 Orientaciones metodológicas de Duval

La teoría semiótica de Duval, procura describir el funcionamiento cognitivo que posibilite al alumno comprender, efectuar y controlar la diversidad de los procesos matemáticos que son propuestas en situaciones de enseñanza. La metodología que se desprende, permite indagar procesos de aprendizaje y que procura orientar sobre qué es necesario observar en las producciones de los alumnos y cual es el modelo pertinente para analizar e interpretar las observaciones y datos de la experiencia.

Este método analiza las contribuciones de los registros de representación semiótica para la conceptualización de los significados del número racional. Los pasos metodológicos sugerido por Duval son:

- Primero una distribución cuidadosa sobre lo que sobresale en el tratamiento, en el registro y lo que sobresale en una conversación.
- Segundo, consideración de la naturaleza de los registros de representación.
- Tercero, utilización de la conversión como instrumento de análisis (variables cognitivas propias de cada registro de representación).
- Cuarto, la congruencia e incongruencia semántica entre las palabras y los símbolos que expresan los números fraccionarios, y
- Por último, los criterios para categorización e interpretación de resultados.

2.6.3.5 Los registros de representación en el análisis de textos

Duval, (1991) en el capítulo III del "Convertión et articulatión des representation analogiques" realiza un análisis de las representaciones en textos y en trabajos de los alumnos. Respecto a estos señala:

> No se puede analizar las representaciones sin, primeramente, identificar las funciones que dirigieran su producción. Esas son las dos cuestiones que debemos ahora abordar. ¿Cómo efectuar un análisis funcional de representaciones? o ¿qué se puede esperar de un análisis funcional de representaciones?

Así en el análisis de las características del texto y en la producción escrita de los estudiantes, que es objeto de lectura, será necesario analizar el grado de complejidad de las formas lingüísticas, los contenidos cognitivos que ello trae. Respecto a esta idea Duval (1991) enfatiza: .

> No se puede descartar el hecho de que ciertas "presentaciones" pueden ser más completas que otras o que ellos pueden ser más adecuados a los procedimientos exigidos para apropiarse el contenido tratado. Si la compresión durante la lectura, resulta de la "interacción entre un lector y un texto" ello puede ser tan importante para cambiar el desnivel entre el contenido cognitivo propio del texto, con aquello que es propio del lector.

En la lectura de un texto escolar de matemática es importante el conjunto de conocimientos previos, la base de conocimientos que tiene el lector y de acuerdo a esto el estudiante puede tener facilidad o dificultad para la lectura e interpretación del texto matemático, por eso es importante en el análisis distinguir la base de conocimiento del estudiante y el contenido cognitivo.

Según Duval (1991), es necesario diferenciar el contenido cognitivo de las presentaciones en un texto:

- Contenido cognitivo, "es el conjunto de representaciones correspondientes a una compresión que permita hacer asociaciones o inferencias y controlar la pertinencia o legitimidad".
- Organización redaccional del texto "es el nivel de organización del texto, el cual queda determinado por las representaciones relativas al contenido cognitivo desarrollado por el texto"

Esta distinción entre contenido cognitivo y organización redaccional del texto, posibilita distinguir dos procedimientos para evaluar la comprensión: primero, con una restitución de todo o parte del texto, esta remite a la comprensión del contenido redactado presentado en el texto y segundo, una producción diferente del mismo en relación directa con el texto, esto conlleva a la compresión del contenido en el campo cognitivo de la situación.

En el análisis de los textos se estudia las representaciones impresas en los libros, con el objetivo de detectar los significados del número racional que este presente. En el análisis de texto Duval explica qué entiende por representación, distingue las representaciones a través de la relación de dos funciones: objetivación expresiva y de tratamiento. Se distingue tres clases de tratamiento:

1. Las representaciones que ejercen solamente la función de tratamiento, las representaciones internas, que revelan tratamientos no intencionales e inconscientes.
2. Las representaciones que ejercen solamente la función de objetivación; en esta clase aparecen imágenes mentales, creencias, etc.
3. Las representaciones que ejercen la función de tratamiento y de objetivación; aquí aparecen las representaciones semióticas.

2.6.3.6 Visualización

Castro y Castro (1997) En el trabajo matemático podemos pensar, de modo eficaz, sin emplear palabras, simplemente viendo figuras geométricas y manipulando símbolos numéricos y algebraicos. La visualización de las figuras y símbolos están estrechamente al pensamiento matemático. Es útil visualizar imágenes, símbolos, para pensar. (Polya, 1944).

La visualización se emplea al manipular figuras o representaciones pictóricas ya sean externas o internas, la primera tiene soporte material y la segunda existe al interior del sujeto como imagen mental. La visualización o pensamiento visual está relacionado a la capacidad para formar imágenes mentales, y la característica principal de la visualización es la evocación de un objeto sin que esté presente.

La capacidad de visualización de un concepto matemático o problema implica interpretar, entender la formación figurativa, manipularla mentalmente y luego expresarla sobre un soporte material. La visualización es un medio para comprender un concepto o resolver un problema.

El pensamiento visual se refiere al pensamiento matemático basado o expresado en términos de imágenes mentales. Se considera que la comprensión alcanzado por procedimientos de información visual, y la que se adquiera por procedimientos analíticos se complementan, de ahí que el aprendizaje debe realizarse utilizando ambos tipos de códigos.

Se ha encontrado en investigaciones que los conceptos matemáticos son aprehendidos mejor cuando el sujeto realiza un dibujo del concepto y lo aprende mejor que si solo conociera su definición verbal. De ahí se admite la hipótesis que desarrollar en el estudiante la capacidad de visualización implica capacitarlo para pensar y hacer matemáticas más eficientemente.

Existe consenso entre investigadores que las representaciones externas de los conceptos matemáticos son indispensables para la comprensión, eso requiere además el desarrollo de la capacidad de visualización en dichos procesos. El desarrollo de la capacidad de visualización cuando se trabaja con representaciones gráficas, ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos, pero es indispensable distinguir el objeto matemático de su representación. Será fundamental, por ejemplo, no confundir el objeto matemático numérico racional con su representación decimal o fraccionaria. Además el conjunto de símbolos, gráficos y siglas que permitan representar una estructura matemática deben tener un carácter sistémico, de allí que se utiliza la categoría sistemas de representación.

La visualización en matemática busca que las ideas, conceptos y métodos de la matemática presentan una gran riqueza de contenido visual representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa tanto en las tareas de representación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo. La visualización es un proceso de codificación y decodificación que está inmerso en un contexto de intercambio personal y social. La visualización es un proceso que se aprende en la interacción con las personas a nuestro alrededor (Guzmán 1997).

2.6.3.7 Representación simbólica en educación matemática

A continuación se da referencia acerca de la teoría sobre las funciones de los símbolos en matemática desarrollada por Skemp (1980) y el rol de los símbolos en el desarrollo de las competencias según Hiebert (1988).

1. Símbolos visuales y símbolos verbales

Primero, estos términos necesitan aclaración, porque tan pronto como las palabras se escriban se convierten en cosas para ser vistas, no oídas; entonces, por lo “verbal” significaremos ambas palabras hablada y escrita.

Para Skemp (1980), los símbolos visuales se ejemplifican con claridad por medio de diferentes clases de diagramas (figuras geométricas). Pero, ¿en qué categoría podríamos colocar los símbolos algebraicos? Básicamente son una taquigrafía verbal, porque pueden leerse en voz alta, o comunicarse incluso sin tomar una forma visual. Se puede decir que los símbolos algebraicos poseen mucho más símbolos verbales que diagramas o figuras geométricas y se clasifican entre los verbales. Estos símbolos verbales y visuales se usan en matemática juntos y separados.

Los símbolos visuales parecen ser las más básicas en su forma primitiva de representación de objetos reales como lo ha mostrado Piaget. Por lo tanto las imágenes visuales son más difíciles de comunicar que las auditivas. Para las últimas, todo lo que tenemos que hacer es traducir nuestro pensamiento vocal en habla en voz alta y para comunicar nuestro pensamiento visual, necesitamos dibujar, pintar o filmar, entonces el pensamiento verbal tiene una ventaja sobre el visual. Sin embargo el que una idea llegue a ser conciente está ligado estrechamente con el uso de un símbolo asociado.

Se deduce que el pensamiento verbal tiende a ser más socializado, es decir es más extensivo, es producto final no solo de nuestro pensamiento individual, sino el de las otras también y de la interacción de ambos.

La visión es individual, mientras el de escuchar es colectivo, tanto en el nivel concreto como en el simbólico; sin embargo, cuando queremos dar énfasis, individual más que colectivo a aspectos de una serie de ideas hablamos a cerca de "un punto de vista".

2. Los sistemas comparados

A manera de resumir las propiedades de contraste y a la vez complementarias de las dos clases de símbolos se esquematizan sus características en el siguiente cuadro:

Tabla 2.2

Propiedades de los símbolos visuales y verbal-algebraicos.

VISUAL	VERBAL - ALGEBRAICO
- Abstrae propiedades espaciales, tales como forma, posición. - Más difícil de comunicar - Puede representar pensamiento más individual. - Integrador, muestra estructura. - Simultáneo. - Intuitivo	- Abstraer propiedades que son independientes de la configuración espacial tales como número. - Más fácil de comunicar. - Pueden representar pensamiento más socializado. - Analítica, muestra detalles. - Secuencial. - Lógico

Las propiedades comunicables, socializadas del sistema verbal–algebraico han contribuido a su predominio sobre el sistema visual. Este valor del simbolismo visual se muestra también por el modo que se superpone con el verbal–algebraico en forma de ordenación espacial de símbolos escritos.

3. Función de los símbolos matemáticos

Para Skemp el símbolo es un mundo de representaciones del concepto y procedimientos matemáticos. Un sistema de símbolos matemáticos constituye un modo específico de representación, un lenguaje matemático. Estos ayudan a generar ideas y aplicarlos a situaciones, además el sistema de signos posibilita la comunicación de conceptos matemáticos y promueve el aprendizaje.

Sin embargo, se ha observado en la práctica educativa que la transferencia de los signos a los estudiantes en forma directa y automática puede producir en el estudiante procedimientos mecánicos en la manipulación de los signos cuando realiza tareas específicas. Una hipótesis que necesita mayor investigación es que muchas de las dificultades en la comprensión de un concepto matemático se deben a un énfasis prematuro en el simbolismo y sus reglas descuidando la comprensión del significado matemático del referente.

Por eso, se recomienda que cuando el docente introduzca a los estudiantes nuevos símbolos matemáticos, es imprescindible que establezca las conexiones entre el símbolo y el significado asociado del referente para lograr un aprendizaje comprensivo.

Skemp (1980) distingue diez funciones de la simbología: la comunicación, registro de comunicación, comunicación de nuevos conceptos, confección de clasificaciones múltiples correctas, explicación, hacer posible la actividad reflexiva, ayudar a mostrar la estructura, automatizar las manipulaciones rutinarias, recuperar información y comprensión y hacer la actividad mental creativa

2.6.3.8 Teoría para desarrollar competencias con símbolos matemáticos

Hiebert (1988), desarrolla una teoría para explicar las conductas excesivamente mecánicas de los estudiantes cuando manipulan símbolos; sin embargo, su objetivo final es proporcionar una base teórica para promover programas alternativos que promuevan el desarrollo de competencias numéricas en estudiantes.

¿Qué son los símbolos? Según Hiebert, los símbolos son entidades que representan o toman el lugar de algo. Estas entidades pueden ser objetos físicos hasta marcas en el papel. Los símbolos pueden **ser copiables** y **no copiables**, los primeros pueden ser reproducidos por diferentes sujetos en diferentes ocasiones, sin perder su identidad. En cambio, los no copiables pierden su identidad cuando se producen cambios en su apariencia física por ejemplo las pinturas. Citando a Kaput señala que los símbolos copiables son considerados como una clase de equivalencia y que los representantes dentro de una misma clase se pueden intercambiar; tanto que los representantes de clases diferentes no se confunden.

Muchos símbolos matemáticos representan ideas cuantitativas. Cuando los escolares usan estos símbolos con intencionalidad re-presentan las ideas del usuario, ésta parece ser una función de los símbolos copiables. Esta es la acepción que en esta teoría se adopta.

Para Hiebert (1988), la competencia con los símbolos se desarrolla a través de cinco procesos secuenciados, los pasos del proceso son retenidos permanentemente al avanzar a los procesos ulteriores. Los pasos son:

1. Conectar los símbolos individuales con los referentes.
2. Desarrollo de procedimientos de manipulación de símbolos.
3. Elaboración de procedimientos para los símbolos.
4. Memorización de los procedimientos para manipular los símbolos.
5. Usar los símbolos y reglas como referente para construir sistemas simbólicos más abstractos.

Los argumentos filosóficos de esta propuesta descansan en que los símbolos son creados como representantes de los referentes, la estructura del sistema de símbolos se desarrolla y que los sistemas de símbolos se separan de los referentes asociados y puede servir en sí mismo como referente para nuevos sistemas de símbolos

Las consideraciones psicológicas del análisis de los procesos cognitivos empleados en la construcción de sistema de símbolos muestra que la actuación inicial y espontánea de los niños parece ser que se ajusta a la teoría postulada, en tanto que, los esfuerzos instruccionales que cambia el orden de la secuencia teórica es inefectiva y a veces contraproducente.

2.6.4 Representaciones del Número Racional

Usualmente, en la enseñanza de los números racionales se tiene en cuenta las actividades cognitivas de formación y transformación y se considera obvia la traducción entre los sistemas de representación, esto es un error, un sistema no siempre es el adecuado para representar ciertos aspectos de un concepto que sólo pueden ser expresados mediante otro, a esta característica se le denomina la irreductibilidad entre sistemas de representación. Así, en la enseñanza del número racional en la educación secundaria se enfatiza en las representaciones simbólicas, en desmedro de la riqueza de otras, como las representaciones gráficas.

Se asume el supuesto que la comprensión del número racional está caracterizado por el dominio de sus sistemas de representación, y la coordinación entre ellos. Las traducciones son importantes porque permite una economía de tratamiento ya que hay facetas del número racional que un determinado sistema de representación puede poner de manifiesto con más claridad que otro; además, algunas acciones ligadas al concepto pueden trabajarse con más facilidad en un sistema que otro. En segundo lugar, los sistemas se complementan, toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa, pues de un sistema a otro no son los mismos aspectos de un contenido los que se representan. La comprensión, reposa sobre la necesaria coordinación de al menos dos sistemas de representación; esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la naturalidad de la actividad cognitiva de traducción, pero eso no quiere decir que no se produzca comprensión en un solo sistema, sino, se comprende en forma aislada y parcial perjudicando los aprendizajes posteriores.

Comprender el número racional requiere un adecuado uso de sus representaciones. Será necesario no confundir el representante con el representado. Según Duval (1993, 1995) el representante y representado son importantes para comprender el objeto matemático; será también importante distinguir 1/2 como representante canónico de una clase de equivalencia y lo que dicho símbolo representa, expresa del número racional en cuestión. Las representaciones se organizan en sistemas, así, el sistema de símbolos tiene un conjunto de relaciones semánticas, sintácticas y que adquieren utilidad en la práctica. Las representaciones 1/2 ; 0.5: $5x10^{-1}$, 50%, cada uno de ellos destaca algunos o oscurece algún aspectos del objeto matemático, luego no existe una representación universal. Lo que se puede observar es que algunos son más "expresivos", más comunicativos que otros. Según Duval (1993, 1995) la comprensión, por decir del número racional, será cada vez más completa en la medida que se construyen sistemas de representación y se realizan las transformaciones al interior de los sistemas de representación y las conversiones de un sistema a otro. (Gairín y Sancho, 2002).

Los sistemas de representación simbólico y gráfico desempeñan un papel fundamental para expresar las ideas y las relaciones constitutivas, Castro, Rico y Castro (1995). Los sistemas de representación del número racional que se utilizan en la enseñanza elemental son las notaciones simbólicas: par ordenado, número decimal, fracción decimal, o verbal, etc.; y con menor frecuencia, las representaciones gráficas (pictóricas, en la recta numérica y en sistema de ejes coordenado) a través de los cuales se organiza el pensamiento y se transmite significados, propiedades y algoritmos operacionales.

2.6.4.1 Representaciones simbólicas del número racional

Los sistemas de representación simbólica son las representaciones digitales, discretas. Es la utilización en forma exclusiva de un lenguaje abstracto usualmente numérico alfabético, es decir un lenguaje aritmético y algebraico, y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento que destacan aspectos operacionales. Las representaciones simbólicas de los números racionales son los pares ordenados de números enteros, con la restricción que el segundo componente es diferente de cero, dispuesto en las formas: por ejemplo, (1, 3) o 1/3, conjuntamente a la representación decimal. Los números racionales pueden estar representados en forma verbal y hasta algebraica v. gr. $S = \{(a,b)/a,b \in Z \wedge b \neq 0\}$.

Los cálculos procedimentales son propios de las representaciones simbólicas algebraicas y están ligadas a la forma y no al contenido, y se rigen por un conjunto de reglas y algoritmos. En la representación simbólica fraccional es necesario distinguir la "significación operacional" o procedimiento de cálculo ligado al significante (número representado). Así, 0, 5 y ½ representan el mismo número racional pero tienen significación operatoria diferente. Las representaciones simbólicas del número racional pueden ser:

1. Aritméticas y algebraicas

- La notación de fraccional, sintácticamente se denotan así; *a/b* o $\frac{a}{b}$.

- La notación decimal, sintácticamente, cumple las normas del sistema de numeración decimal incorporando una coma decimal para separar los dígitos de la parte entera de los de la parte fraccional decimal.
- La notación como par ordenado, sintaxis *(a, b) o (2, 3).*
- Notación porcentual, sintaxis *a%* que equivale a $\frac{a}{100}$. Esta notación se evalúa semánticamente como un operador que actúa sobre un número o una cantidad de magnitud.

Representaciones Verbales

La fracción puede ser expresada verbalmente, como lectura de la representación simbólica o gráfica o enunciado de una situación fenomenológica, problema o situación de la vida real.

2.6.4.2. Representaciones visuales o figurativo

Su sintaxis viene dado por reglas de composición y convenios de interpretación que permite discernir propiedades de los números racionales. Dentro de las representaciones gráficas se considera las representaciones pictóricas, el modelo de la recta numérica y el plano cartesiano para representar el número como par ordenado.

1. Representaciones Pictóricas

Es la utilización de un soporte visual (representación icónica, geométrica o diagramático), un código gráfico para plantear las relaciones entre los elementos de una fracción.

2. Representaciones en la recta Numérica

Es un sistema de signos, imágenes, reglas y convenios con los que se representan gráficamente los números racionales y se interpreta sus propiedades y operaciones sobre una recta numérica. En un primer nivel de análisis, se examina las imágenes específicas, convenios de carácter general y reglas para representar los números. En un segundo nivel de análisis, se considera la recta numérica como un dominio de estudio de las propiedades de orden y densidad de los números racionales.

En la recta numérica, la fracción como representante de un número racional se asocia a un punto en la recta. Es decir, no se asocia a una parte o subconjunto de objetos. Si bien se usa el concepto de parte-todo para ubicar el punto, no se debe entender como el significado en cuestión. Esta representación tiene la ventaja de conducir al estudiante a entender que las fracciones no sólo se ubican entre cero y uno, sino que también, pueden existir más allá del uno, como es el caso de las fracciones impropias y las representaciones mixtas. Esta representación será vital para entender el significado de medida, pues, tendremos que utilizar la representación en la recta numérica como recurso didáctico para estudiar las unidades y sub-unidades de medidas de longitud. Además, logra que el estudiante comprenda que al igual que los números naturales, los racionales pueden ser parte de la "recta numérica" reclamando su categoría de "número".

Whitehead (1944), representa las fracciones considerando la serie de números enteros en la recta numérica conformando los "números reales" estos números se presentan en una recta por medio de puntos sobre la línea que principia en 0 y se prolonga indefinidamente en la dirección 0X como se muestra en la figura 2.5:

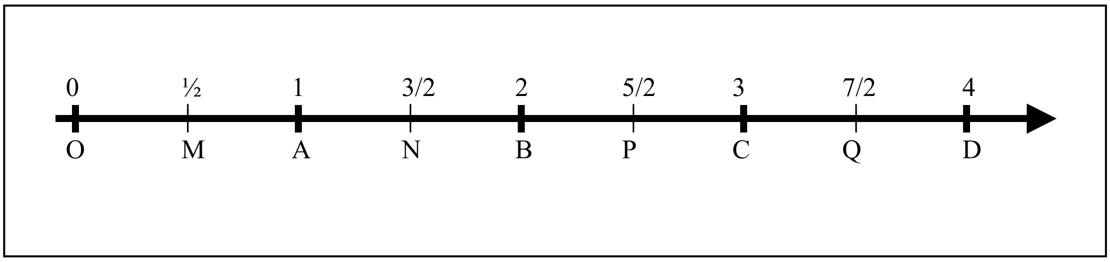


Figura 2.4 Los números racionales en la recta numérica.

Donde OA representa la unidad longitud que se transporta a lo largo de la línea AB, BC, CD.

Entre O y A se representa las fracciones propias y las inconmensurables menores de 1; y el punto medio de OA representa ½; en tanto que las fracciones impropias se sitúan a través de los puntos AX.

Esta representación transmite la idea de orden de los números, creciente de magnitud, comenzando en cero y aumentando continuamente a medida que se avanza hacia X. Además, se entiende que la serie de fracciones es una serie compacta (propiedad de la densidad de los números racionales) ya que ninguna fracción tiene predecesor o suceso inmediato, porque, sean dos fracciones p y q donde $p<q$, entonces, siempre es posible encontrar una fracción con valor intermedio, basta sumar esa dos fracciones y dividir entre dos y así iterar el proceso indefinidamente. Luego la serie de cifras quebradas, es una serie "compacta".

2.6.4.3 Representación del número racional en los libros de texto

Garrido (2000) en su investigación realiza un análisis de libros de texto de enseñanza fundamental respecto a los números racionales, a la luz de la teoría de los registros de representación de Raymond Duval. Algunas interrogantes que orientaron el estudio fueron ¿cómo los diversos registros de representación de los racionales son trabajados en los libros didácticos?, ¿cómo en los libros son introducidos los números racionales, sea en la representación fraccionaria o en la decimal y especialmente que tratamientos son realizados?, ¿ son trabajadas las conversiones y articulaciones que ocurren entre los diferentes registros?.

En la exploración se adopta la teoría de los registros semióticos de representación de Duval y asume tres representaciones distintas en el análisis de los libros:

a) Registros simbólicos, dentro del cual se enfatiza la representación algebraica, fraccional y decimal.
b) Registros de representación figural o geométrico.
c) Registro del lenguaje natural.

La metodología de investigación se respalda en el "*Análisis de contenido*" de Bardin (1977) citado por el Garrido. Se inicia con un pre-análisis comparativo de los contenidos de dos colecciones de libros. Las dos colecciones de libros corresponden a las series 1° a 8° de Enseñanza Fundamental. Estas colecciones presentan diferentes formar de abordar las fracciones, los contenidos están segmentados y tienen una secuencia en "espiral".

El análisis de los libros de texto atendió al reconocimiento de los registros de representación semióticos utilizados, las traducciones entre las representaciones y las manipulaciones al interior de las mismas (Duval, 1991). Las interrogantes que orientaron las observaciones, recolección y análisis fueron ¿qué registros se utilizan en la presentación de contenidos?, ¿cómo se realizan las transformaciones y conversiones entre los registros de representación?

Desde la perspectiva metodológica se caracterizó las dos colecciones de libros, considerando los criterios siguientes: organización de contenidos, referencias históricas como herramienta motivadora, el rol de los ejemplos en el desarrollo de los conceptos, uso de las notaciones y convenciones, proposición de ejercicios y uso de algoritmos, proximidad de las situaciones a la vida cotidiana y contextos próximos a la realidad, proposición de actitudes, juegos, que promuevan el trabajo en grupo y presencia de estrategias del cálculo mental.

Los resultados centrales de análisis de la representación fraccional del número racional son los siguientes:

1) La noción de fracción es introducida por medio de figuras de parte–todo continuo y discreta. Estos son presentadas y no promueven la participación del alumno en la acción de partición.
2) Las representaciones de la fracción en un segmento no contemplan la cuestión de la conmensurabilidad.
3) Las actividades de comparación y equivalencia de fracciones priorizan la representación simbólica en su forma fraccional apoyado por la decimal.
4) Se observa pocas actividades de ordenación en el registro fraccionario, en la recta numérica.
5) Si no se tiene cuidado las figuras pueden constituirse en dificultades para conceptuar los números racionales.
6) El uso del lenguaje natural puede ocasionar excesos en la utilización de términos como; fracciones aparentes, impropia, irreductible, mínimo común múltiplo, etc.

Es revelador la observación que en la introducción del número racional se utilizan todos los registros. Las actividades de conversión dejan ver que son más frecuentes las traducciones de registros figural a fracción y decimal y menos frecuente las traducciones de registro fraccional decimal a figural. El sentido de las traducciones casi siempre parte del registro figural a fraccional, lenguaje natural a decimal, en tanto es poco frecuente en ambos sentidos entre fracciones y lenguaje natural.

2.6.4.4 Presencia histórica de la fracción en los libros de texto

Escolano (2004), consciente de la relación entre comprensión y dominio coordinado de los diferentes significados del número racional, realiza una revisión histórica de la presencia de los diferentes significados en los libros de texto para introducir el concepto de fracción en el sistema educativo español. El estudio se fundamenta en un análisis epistemológico y fenomenológico. La fenomenología permitió definir los significados que reflejan la génesis de la fracción, establece los problemas que históricamente resolvió el número racional.

El número racional modeliza múltiples fenómenos, problemas y situaciones de la vida real: situaciones de medida, de reparto y de razón o los surgidos a consecuencia de la evolución de la propia matemática como el *cociente indicado* como elemento de la estructura algebraica de cuerpo y la fracción como operador ligado a la noción de función racional.

Escolano declara que el significado de *relación parte-todo* surge como un recurso didáctico del que la práctica escolar se viene sirviendo exclusivamente. El objetivo de su estudio es averiguar, a través de los libros de texto, la razón de que esta presentación didáctica de la fracción prevalezca sobre otros significados de la fracción en las secuencias de enseñanza.

En este estudio se hace una clasificación temporal de los libros de texto que se indican a continuación:

- Primer periodo: segunda mitad del siglo XIX.
- Segundo periodo: primera mitad del siglo XX.

- Tercer periodo: década de los cincuenta y sesenta.
- Cuarto periodo: década de los setenta.
- Quinto Periodo: década de los ochenta.
- Sexto periodo: desde los años noventa hasta nuestros días.

Los resultados de la revisión histórica revelan que el significado parte-todo de la fracción no tiene sus orígenes en las necesidades humana, sino, es el resultado de la práctica educativa, y lo ubica en los recursos didácticos que permite eludir las actividades de medida con objetos tangibles que general dificultades en la gestión del material y además, el significado parte-todo permite abreviar los periodos de instrucción. En consecuencia Escolano coincide con nuestro estudio en el sentido que, la enseñanza de la fracción se sustenta en el significado exclusivo de la relación parte-todo y los libros de texto intentan justificar las relaciones y propiedades del número racional desde este único significado (Escolano, 2004).

2.7 RESULTADOS SECUNDARIOS Y CONSECUENCIAS PARA LA INVESTIGACIÓN

En esta segunda fase del análisis didáctico, se estudia las relaciones entre la información ya recopilada, extrayendo nuevos resultados y conclusiones generales, además de conjeturas y prioridades para la investigación, González (1999).

En este apartado se describe las conclusiones teóricas operativas y priorizadas para la investigación. En una primera parte, se sintetiza los resultados secundarios como resultado de un análisis cualitativo de carácter didáctico, y finalmente, una exposición de las consecuencias para la investigación. En efecto, se exponen los principales resultados del cruce de planteamientos entre autores y la reflexión personal. Estos elementos del análisis se configuran de la siguiente manera:

2.7.1 Resultados Secundarios

1. Cuando el estudiante vivencia su aprendizaje de los números racionales en la educación secundaria, su comprensión es un sistema coherente pero incompleto, es decir, el estudiante siempre tendrá conceptos, propiedades,

técnicas (conocimientos procedimentales) nuevas que aprender. Cuando el educando se enfrenta a situaciones nuevas y contradictorias o vacíos en su forma de comprender, se ve obligado a reestructurar su forma de concebir el objeto matemático. Una comprensión de la fracción, como representante del número racional, necesariamente pasa por el aprendizaje de sus diferentes significados.

2. Diferentes investigaciones de la escuela brasileña, postulan el significado de la fracción como número sin una fundamentación de antecedentes y menos una argumentación epistemológica y fenomenológica.
3. Dos Santos (2005) fundado en los trabajos de Nunes y Bryant, estudian los significados de la fracción como parte-todo, medida, número, operador y cociente, y evita el significado de razón, a pesar que dentro de sus antecedentes referencian a Kieren (1988) quien remarca la razón como uno de los significados principales de la fracción.
4. La evaluación del significado de cociente con magnitudes discretas revela las limitaciones en la comprensión de la naturaleza de un ente numérico, así se encontró que el par ordenado *a/b* como representante de un número racional podría ser entendido como un par ordenado de números enteros y no como un objeto matemático con rango de número.
5. Los conocimientos matemáticos aprendidos con anterioridad al concepto de fracción y número racional, como la noción de número natural, entero y operaciones se constituyen en un obstáculo epistemológico tal como lo señala De León (1998), Llinares et al (1997) y Rodríguez (2005).
6. La revisión histórica, revela, que las fracciones tienen su origen esencialmente en el significado de medida y razón, en ellos queda implícito el significado de parte-todo, muy enfatizado en la escuela moderna, en desmedro de su fenomenología genética. Boyer (1996) señala siempre que los "matemáticos o astrónomos de la antigüedad querían utilizar un sistema preciso de aproximación, recurrían a la escala sexagesimal para tratar las fracciones. Esta costumbre condujo a las expresiones "fracciones de los astrónomos" y "fracciones de los físicos". En esta revisión histórica se percibe claramente que la noción de fracción estuvo muy ligada a la necesidad de conseguir medidas

precisas en las ciencias naturales, así las fracciones sexagesimales se habían convertido en la herramienta estándar para la astronomía y la física. De esta observación histórica del número fraccionario podemos afirmar que su significado de medida se encuentra en su génesis. Así mismo, para Whitehead (1944) los griegos consideraron las fracciones en su significado de razón o comparación de medidas de segmentos. En la época moderna, las fracciones se popularizaron entre el común de las personas para la realización de sus transacciones comerciales y cálculos necesarios de la vida cotidiana.

7. El conocimiento académico del número racional se resume en una estructura algebraica 'campo' como un sistema formal deductivo, además este saber sabio transmite el significado de la fracción como cociente ($a/b, b \neq 0$) de enteros.
8. Resultados de investigaciones relativas al proceso enseñanza-aprendizaje de las ideas de 'fracción', revelan que para que el estudiante pueda conseguir una comprensión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con el concepto de fracción, se deben plantear las secuencias de enseñanza de tal forma que proporcionen a los educandos la adecuada experiencia con la mayoría de sus significados.
9. Los números racionales tienen una estructura compleja y muy utilitaria en la ciencia, las arte, y la vida cotidiana. En cada uno de estos contextos se presenta con diferentes significados. Estos significados están presentes en el currículo escolar como, por ejemplo, en las razones trigonométricas, proporciones geométricas, probabilidades, polinomios racionales y porcentajes asociados a una fenomenología.
10. En opinión de Gairín y Sancho (2002) el número racional tiene los significados de 'parte-todo', 'cociente', 'medida', 'razón' y 'operador'. Aparentemente el significado parte-todo está omnipresente en los demás significados. Posiblemente por esta razón se la utiliza para introducir la noción de fracción en el aula. Como se constató en investigaciones anteriores y en los libros de texto, el aprendizaje basado casi exclusivamente en la interpretación parte-todo puede convertirse en un obstáculo para un posterior aprendizaje de los demás significados. Esto ocurrirá siempre que se priorice esta interpretación en detrimento de los demás.

11. En ciertos casos la relación es estrecha, las representaciones de un concepto matemático como un gráfico o expresión simbólica de un número racional, es un concepto difícil de ser comprendido integralmente sin el uso de las representaciones. Sin embargo, cada representación no puede describir un concepto matemático completamente, proporciona la información sólo de una parte de sus aspectos. Diferentes representaciones que se refieren al mismo concepto se complementan y todos estos contribuyen juntos a una comprensión integral del objeto matemático. Las tres presuposiciones para la comprensión de un concepto matemático son los siguientes: primero, la habilidad de identificar el concepto, significado en los múltiples sistemas de representación; segundo, la habilidad de manipular los conceptos flexiblemente dentro de un sistema particular de representación; y tercero, la habilidad a "traducir" el concepto de un sistema de representación a otro (Lesh, Post y Behr, 1987).
12. Los estudiantes manejan con más dominio las representaciones simbólicas, así, por ejemplo, en la educación primaria abordan el estudio de los números racionales (números fraccionarios) con ayuda de las representaciones pictóricas y en la secundaria se enfatiza el uso casi exclusivo de las representaciones alfanuméricas. Una razón principal para esto es que los libros de texto de matemática hacen uso escaso de representaciones gráficas (pictóricas, en la recta numérica y en sistema de ejes coordenados) para promover la comprensión.
13. El análisis de los antecedentes revelan que las representaciones cumplen un papel importante en los procesos de comprensión de los significados del número racional. Esta investigación apunta a identificar las dificultades que se presentan en la transformación y conversión de representaciones del número racional y examinar el fenómeno de compartimentalización que puede afectar el aprendizaje de la matemática de manera negativa. La compartimentalización aparece cuando los estudiantes tratan inconsistente o incoherentemente con relativas tareas que difieren en un cierto rasgo, es decir, un modo de representación, por ejemplo, estudiantes que pudieron resolver una situación problemática con éxito usando el registro simbólico necesariamente no estaban en una posición de representar este problema en la recta numérica o usando

otra representación. El fenómeno de compartimentalización revela una dificultad cognoscitiva que se levanta de la necesidad de lograr la traducción flexible y competente de una representación a otra (Duval, 2002).

14. Entre las conclusiones de Garrido (2000) se ha encontrado que en la introducción del número racional se utilizan todos los registros. Las actividades de conversión dejan ver que son más frecuentes las traducciones de registro figural a fracción y decimal; y, el menos frecuente, las traducciones de registro fraccional decimal a figural. El sentido de las traducciones casi siempre parten del registro figural a fraccional, lenguaje natural a decimal, en tanto, es poco frecuente en ambos sentidos entre fracciones y lenguaje natural.
15. Aparentemente se produce un conflicto de categorías nocionales cuando se afirma que la *unidad* es un *significado* (Garrido 2000) de los números racionales en el sentido que le asigna Kieren (1988) al término significado. Si ese fuera el caso estaríamos en todo el derecho de afirmar que “0/5” es otro significado de los racionales llamado *significado neutro* de lo racionales. Evidentemente esta aserción requiere un análisis teórico más reflexivo para deslindar estas divergencias.
16. Entre otras observaciones que se hace al trabajo de Garrido (2000) es que considera la representación verbal que denominó *registro del lenguaje natural* como distinta de la representación simbólica. Esta interpretación puede producir limitaciones al momento de interpretar los procesos de comprensión, será necesario, entonces, teorizar sobre la naturaleza de la representación verbal, que también, es considerada simbólica y consecuentemente debe comportarse en forma análoga a la representación “simbólica matemática”

2.7.2 Consecuencias para la Investigación

Si la comprensión se produce cuando las representaciones logran conectarse en redes, progresivamente más estructuradas, en consecuencia, la comprensión del concepto de número racional se evaluará en forma integral cuando el estudiante pueda establecer relaciones entre sus diferentes interpretaciones y representaciones. Cada registro de representación ha de transmitir un aspecto parcial del significado del número racional, luego, varias representaciones estructuradas coherentemente portarán mayor riqueza de significados, revelando mayor comprensión.

Para evaluar la comprensión del concepto de número racional será necesario evaluar los significados de la fracción como parte-todo, medida, razón, cociente y operador.

La forma insistente, casi única de introducir los números racionales como el conjunto de pares ordenados *a/b* de números enteros *(b≠0)*, en los libros de texto, es posible que esté provocando el fenómeno comprensivo que niega el estatuto de ente numérico a las fracciones. Esta intuición deberá ser contrastada en el estudio del capítulo IV.

Es oportuno, preguntarse si así como los conocimientos previos sobre números naturales pueden constituirse un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de los números racionales, también se suscitará este fenómeno de obstaculización o interferencia entre los diferentes significados de la fracción entre sí. Luego, es legitimo suponer que el predominio de uno de los significados (parte-todo) en el aula, interfiere en la comprensión de los demás significados.

Para Escolano y Gairín (2005), el significado parte–todo no tiene significado de medida, cociente ni razón; resulta evidente que este significado parte-todo no es "igual"; sin embargo, nuestras observaciones personales nos hacen intuir que si bien no son "iguales", el significado parte-todo, está omnipresente en los significados de medida, cociente y razón, es más, consideramos que las ideas de "parte-todo", "parte-parte", fraccionamiento, son pre requisitos para entender los significados en cuestión. Luego, podemos aseverar que el significado parte-todo está incluido en los significados de medida, cociente y razón, desde luego, no son iguales, eso es evidente.

En Magina y Campos (2004) los docentes no tienen en claro los diferentes significados de la fracción, lo que los lleva a suponer situaciones de enseñanza limitados, restringiéndose a la percepción y al significado parte-todo. Además, la posible discrepancia entre el pronóstico y el desempeño real de los alumnos está relacionada al hecho de que los propios profesores, sabiendo resolver las cuestiones sobre fracciones, no tienen explícito las invariantes ni tienen claro los diferentes significados que las fracciones asumen, lo que a su vez los limita en la utilización adecuada de estrategias de enseñanza y poder auxiliar a sus alumnos a superar las falsas o imparciales concepciones sobre fracciones.

Luego del análisis de los libros de texto y el desempeño de los estudiantes, será necesario determinar si la génesis histórica de las fracciones se reproduce en el desarrollo del concepto de número racional en la escuela en el proceso de enseñanza aprendizaje; además, será preciso indagar si la comprensión del estudiante revela estos rasgos del desarrollo histórico o en su defecto se ha desarrollado una especie de transposición didáctica en el sistema didáctico que configure una secuencia y elementos del significado alternativo para la enseñanza aprendizaje de las fracciones como representante del número racional.

En el ámbito de la educación básica, como se traduce en los libros de texto de matemática y en la evaluación de su comprensión que revelan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problemáticas de significados de la fracción, es necesario valorar cuán próximo se encuentra el objeto a ser enseñado de los libros de texto al saber académico y además qué significado(s) está presente de forma implícita y explícita en este saber académico; asimismo, sería prudente postular un significado del número racional como ente algebraico.

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se explica el diseño metodológico de la investigación; se expone los procesos metodológicos de las dos etapas del estudio, la teórica y la empírica. El capítulo se divide en dos bloques: En el numeral (3.2) se incluye una breve descripción de la metodología de la fase teórica, donde se explica los procesos de revisión de los antecedentes relacionados con el problema de investigación. Específicamente se ha empleado el Análisis Didáctico como método de investigación en Educación Matemática (Gallardo y González, 2006). Luego, se expone una delineación general de la configuración actual de dicho método, junto con las concreciones de su aplicación en el estudio, además de señalar sus limitaciones. En el bloque (3.3) se describe la metodología de la etapa empírica del estudio descriptivo-evaluativo, en el que se caracteriza el nivel y tipo de investigación, población y muestra de estudio; seguidamente, se anotan los procedimientos de recolección de datos, descripción y análisis del instrumento de recolección y, finalmente, el proceso de análisis de datos.

3.2 LINEAMIENTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

La finalidad de la investigación es describir y evaluar la comprensión de la interferencia de los significados del número racional positivo, en su representación fraccional, a través del análisis de los registros de representación que ostentan los estudiantes de formación magisterial de matemática. Desde estas intenciones delineamos la metodología del trabajo de indagación científica que configura dos etapas: una teórica, sustentado en el Análisis Didáctico (Gallardo y Gonzáles, 2006); y otra, empírica.

En la primera etapa del estudio, se organiza el Análisis Didáctico, a partir de un marco teórico y estudio de antecedentes de investigación, se estructura los resultados primarios y secundarios así como sus consecuencias para la investigación, con el objetivo de desarrollar una base teórica que integre diferentes teorías para afrontar la interpretación y análisis de la comprensión de los significados del número racional. El cuerpo de antecedentes de investigación está organizado en el capítulo II. Tiene cuatro ajes teóricos a ver: primero, comprensión y cognición; segundo, enseñanza del número racional; tercero, fenomenología de la fracción y cuarto, epistemología del número racional.

En la segunda etapa se realiza el estudio empírico de los significados del número racional en su representación fraccional. Esta etapa tiene dos momentos: primero, se realiza un análisis de los significados utilizados para introducir el concepto de número racional en los libros de texto, del nivel de educción secundaria, el examen se centra en tres aspectos: epistemológico, fenomenológico y curricular (Capítulo II); en un segundo momento, se efectúa un estudio evaluativo de la comprensión de los significados del número racional, que ostentan los estudiantes de formación docente de la especialidad de matemática, valoración que se concreta en base a las representaciones externas que exhiben las soluciones escritas a seis cuestiones que involucran las interpretaciones de la fracción como parte-todo, medida, razón, cociente y operador. Este examen se organiza en torno a tres asuntos: tipificación de las respuestas respecto al significado, interferencias entre significados y un examen de los tipos de representación utilizados en la solución de cada problema de la prueba (Capítulo V).

La siguiente figura ilustra las dos etapas:

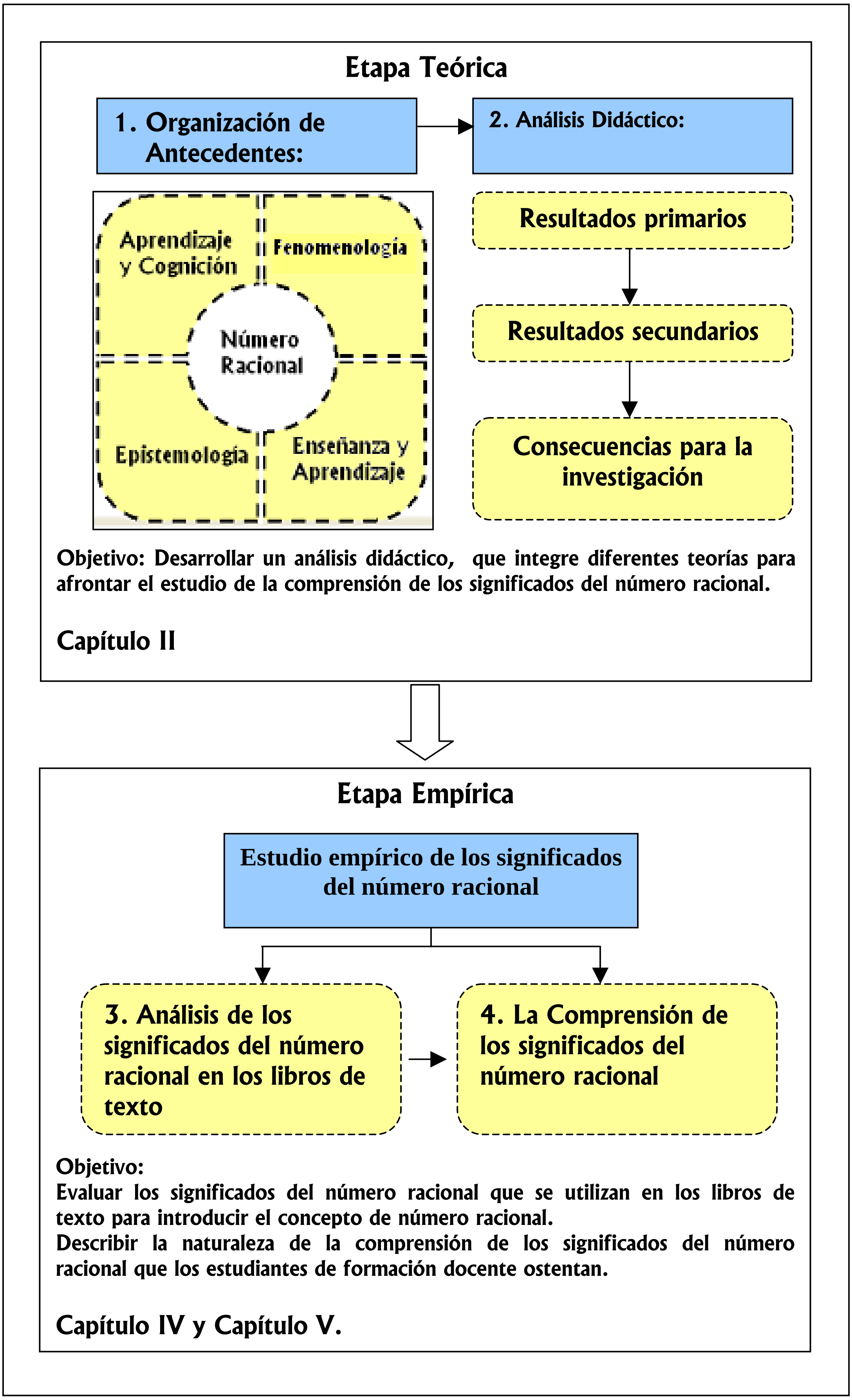


Figura 3.1 Esquema de las etapas de investigación.

3.3 METODOLOGÍA DE LA FASE TEÓRICA

3.3.1 Ámbitos del Estudio Teórico

La información teórica recopilada se estructura en base a cuatro bloques básicos, sugeridos por el análisis didáctico. Estos se han concretado a través de las siguientes temáticas:

1. Aprendizaje y cognición. Presentamos una exposición sintética de los avances recientes producidos en la investigación sobre comprensión en matemáticas, así como una descripción de los principales componentes teórico-metodológicos que configuran la aproximación operativa a la comprensión del conocimiento matemático y una revisión de los estudios hechos sobre el aprendizaje de los números racionales centrados en la caracterización de las concepciones elaboradas por los estudiantes sobre este objeto matemático.

2. Enseñanza y currículum. Aquí organizaremos las aportaciones relevantes en torno a la enseñanza del número racional, fundamentalmente, en forma de sugerencias didácticas y propuestas metodológicas para el aula. Estos contenidos se completan con una descripción del tratamiento dado al número racional en el actual currículum peruano, a través de los documentos normativos.

3. Fenomenología. Aquí se expone la información correspondiente a la esfera fenomenológica del conocimiento matemático en general, y del número racional en particular. Esta se complementa con la descripción de los resultados obtenidos por algunos estudios específicos en los que se han desarrollado análisis fenomenológicos vinculados al número racional.

4. Epistemología. Se estudiará la naturaleza del número racional, a través de la caracterización de sus significados en educación matemática y la descripción de sus principales representaciones externas que se admite como conocimiento matemático.

Para la revisión de los antecedentes relacionados con el problema de investigación, se emplea el Análisis Didáctico como método de investigación en Educación Matemática (Gallardo y González, 2006). En este apartado presentamos una descripción general de la configuración actual de dicho método, junto con las concreciones de su aplicación en nuestro estudio.

3.3.2 Consideraciones Generales sobre el Análisis Didáctico

En el contexto de la investigación en educación matemática, identificamos el análisis didáctico con el procedimiento metodológico no-empírico, que analiza, relaciona e integra, a través de un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, información procedente de diversas áreas de investigación interrelacionadas por su objeto de estudio (González, 1998). De acuerdo con Gallardo y González (2006), se trata de un método aplicable tanto a campos conceptuales y conocimientos matemáticos concretos, como a aquellos otros fenómenos o nociones de naturaleza compleja, cuyo estudio resulta de interés para el campo de la educación matemática. Cuando se emplea con un conocimiento matemático, son cuatro las áreas básicas referenciales a considerar como fuentes de información científica: historia y epistemología de la matemática; aprendizaje y cognición; fenomenología y enseñanza; y, estudios curriculares en relación con el conocimiento matemático en estudio. En caso de realizarse sobre un fenómeno o noción compleja, se identifican dos bloques básicos de información: la proporcionada por los antecedentes relacionados, procedentes de áreas de conocimiento afines a la educación matemática, que comparten o tienen una incidencia especial sobre el objeto de estudio y la información propia del área configurada por los antecedentes específicos. En ambos casos, la aplicación del análisis didáctico proporciona una síntesis estructurada que permite detectar dificultades, potencialidades y relaciones, en trabajos previos, así como organizar y delimitar con precisión el desarrollo posterior de la investigación propia (González, 1999).

Fases

El proceso consta de dos fases fundamentales:

- Una *revisión primaria* de la información considerada en cada una de las áreas de investigación que incluye la obtención de datos, resultados y conclusiones relevantes, organizados por cuestiones y contenidos relacionados con el problema de investigación, tratados en forma neutra. El dominio de las fuentes de información más relevantes es contemplado en esta fase como un requisito inicial del método.

- Un *análisis de las relaciones* existentes en la información ya recopilada. En esta fase de revisión secundaria, se extraen nuevos resultados y conclusiones generales, donde se identifican cuestiones, conjeturas y prioridades para la investigación, conformando de este modo la información elaborada, característica del análisis didáctico.

Resultados

El procedimiento proporciona tres tipos de resultados genéricos:

(a) *Resultados Primarios* (RP) o conclusiones del análisis primario en términos de proposiciones contrastadas o asumidas por grupos de autores relevantes. Estos datos pueden ser comunes a una serie de autores o líneas de estudio, y a su vez singulares, en la medida en que sean importantes y destacables. Se incluyen además, las informaciones que sintetizan los resultados de una serie de trabajos o posiciones y las lagunas o carencias detectadas, consideradas como información explícita por defecto.

(b) *Resultados Secundarios* (RS). Son conclusiones obtenidas de la reflexión realizada sobre los resultados primarios. No se trata de información directa, presente en los trabajos revisados, sino, se hace explícita a través de los análisis de las relaciones entre los resultados puntuales y primarios. Los resultados secundarios pueden ser, entre otros: opiniones, valoraciones y posiciones personales fundadas en datos objetivos (puntuales o primarios); conjeturas plausibles en virtud de la información que las sustenta; interpretaciones avaladas y/o sólidas, en base a argumentaciones coherentes y fundadas; lagunas o carencias implícitamente detectadas o requisitos y necesidades obligadas por las situaciones, contextos o la mera realidad, a tenor de las circunstancias que rodeen los estudios revisados.

(c) *Consecuencias* para la investigación (C). De los propios resultados secundarios se pueden elaborar conclusiones que no estén exactamente entre ellos, sino, que procedan del análisis de los mismos. Estas consecuencias pueden ser, entre otras: conjeturas para la investigación; recomendaciones para la realización de estudios teóricos o empíricos previos; componentes de modelos teóricos a utilizar y contrastar en el estudio u orientaciones generales. Este tipo de conclusiones habrá que entenderlas, como supuestos iniciales e ideas emergentes reconocidos, pero también necesitados de un mayor desarrollo y vertebración posterior, para la consolidación de posibles propuestas teóricas más consistentes.

El análisis didáctico contempla la posibilidad de que los resultados secundarios y consecuencias obtenidos de su aplicación, en un estudio específico, pasen a ser considerados resultados primarios en posteriores investigaciones relacionadas, reconociéndose de este modo una relatividad en los resultados, derivada de la aplicación recursiva del método (figura 3.2). Los pormenores de esta circunstancia que acontece en la presente investigación, en relación con la tesis doctoral de Gallardo (2004), se expuso en el apartado 2.3.1 del capítulo II.

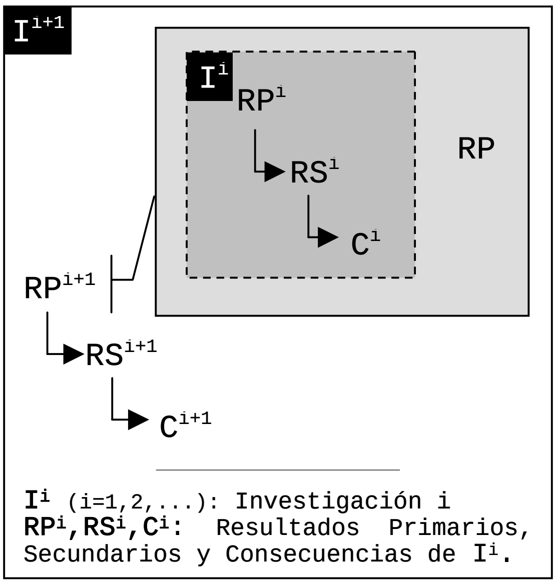


Figura 3.2 Recursividad del Análisis Didáctico y relatividad de sus resultados

3.3.3 Aplicación del Análisis Didáctico en la Investigación

La descripción de la aplicación del análisis didáctico en la presente investigación, se lleva a cabo mediante la exposición de los aspectos más destacados relacionados con el acceso al conocimiento científico (estrategia de búsqueda, fuentes y tipos de información), el procedimiento empleado en la revisión de la información recopilada, la organización de los resultados obtenidos y las limitaciones manifestadas en el empleo del método en este caso particular.

3.3.3.1 Acceso al conocimiento

Se establecieron dos estrategias básicas en el proceso de obtención de información:

(a) El empleo de los trabajos recopilatorios de Gutiérrez y Maz (2001), Ruiz, Castro y Godino (2001) y, recientemente, Gallardo (2006) como referencia concreta para garantizar en lo posible el control sobre las principales fuentes documentales relevantes para la investigación y sistematizar el proceso de búsqueda de documentación específica en Educación Matemática.

(b) La consideración del apoyo desinteresado de algunos investigadores, en su mayoría profesores del Programa de Maestría *Enseñanza de la Matemática* (UNSAAC-CUES), en el envío puntual de material impreso accesible desde sus centros de trabajo.

Respecto a los medios utilizados, se consideraron:

- **Internet.** Por su accesibilidad y disponibilidad de recursos llegó a ser la vía de acceso efectiva a las referencias de textos completos más empleados en esta fase de la investigación.

- **Bibliotecas y librerías.** Se consideró para la consulta directa, el material disponible en la biblioteca de Educación Matemática organizada por CUES en la Universidad Nacional de San Antonio Abad de Cusco y en la biblioteca de la Facultad de Educación y de la Universidad Nacional del Altiplano (UNA) de Puno.

También se contó con el catálogo de publicaciones electrónicas de la biblioteca de la Universidad de Málaga (España) gracias al apoyo de Dr. Jesús Gallardo. Así mismo, se visitaron ocasionalmente librerías universitarias y otros puntos de venta en Puno, Juliaca, Cusco y Lima para localizar y adquirir obras de interés para la investigación, procedentes de distintas áreas del conocimiento como la pedagogía, la filosofía, la sociología, la historia y la epistemología de las ciencias y de la matemática, la psicología cognitiva y, sobre todo, la educación matemática.

Las estrategias seguidas y los medios empleados permitieron acceder a las siguientes fuentes y tipos de información:

1. Publicaciones periódicas especializadas.

Se consideraron para su revisión las revistas en español *Enseñanza de las Ciencias, UNO, Epsilon, Suma y Unión.* Igualmente, se contemplaron artículos de algunas de las publicaciones internacionales editadas en inglés y francés más representativas del área, como *Educational Studies in Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, Journal of Mathematical Behavior o International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

2. Actas.

Se revisaron las actas disponibles en Internet de:

- las conferencias anuales del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), en sus ediciones PME25, PME26 y PME28;
- los simposios anuales organizados por la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), desde 1997 hasta 2006;
- las *Reuniones Latinoamericanas de Educación Matemática* (RELME) convocadas anualmente por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). En concreto, ALME14, ALME15, ALME17 y ALME18.

3. Bases de datos.

De las que ofrecen un acceso libre a su contenido en Internet, se consultó la base de datos, general, sobre educación proporcionada por el *Educational Resources*

Information Center (ERIC) y la *base de datos de documentos PNA* gestionada por el grupo de investigación *Pensamiento Numérico y Algebraico*.

4. Libros.

Se han empleado diversos volúmenes de carácter general sobre historia y epistemología de la matemática, cognición y aprendizaje, o enseñanza y currículum, así como, obras específicas en didáctica de la matemática en forma de manuales o 'handbook' (por ejemplo, los editados por English (2002) o Gutiérrez y Boero (2006)), monografías (p.e., *Yearbook* publicados por NCTM) y colecciones como *Matemáticas: cultura y aprendizaje;* y *Educación Matemática en Secundaria*, editadas por *Síntesis*.

5. Literatura gris.

Igualmente, se ha considerado para su revisión material diverso no publicado en forma de memorias de tercer ciclo, tesis de maestría y tesis doctorales, así como, de manera complementaria distintos documentos de propósito formativo destinados a cursos de Maestría y Doctorado.

6. Otras fuentes.

Además de las mencionadas, se ha hecho uso de los recursos bibliográficos ofrecidos por las páginas web, de proyectos como el *The Rational Number Project* (Universidad de Minnesota, Estados Unidos), de grupos de investigación como el de *Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática* (Universidad de Granada, España) o el *Collaborative Group for Research in Mathematics Education* (Universidad de Southampton, Reino Unido) y de centros de investigación como el *Freudenthal Institute* (Universidad de Utrecht, Holanda).

3.3.3.2 Método de revisión de documentos

Para la revisión de documentos se ha empleado como procedimiento admitido el análisis didáctico el que ha dado muestras de ser efectivo en investigaciones precedentes (Gallardo, 2004). El esquema básico constituido por las dos partes diferenciadas son las siguientes:

- *Resumen neutro del contenido* del documento. En él destacan, según sea el caso, las principales ideas relativas a los supuestos teóricos adoptados, la metodología de investigación empleada, los resultados y conclusiones obtenidos o las propuestas didácticas y recomendaciones curriculares sugeridas. Es decir, se enfatiza lo más relevante de cada tipo de documento según su contenido.

- *Análisis crítico de la información revisada* en cada referencia, centrado principalmente en las características de los resultados obtenidos, en las potencialidades y limitaciones manifestadas; asimismo, en las analogías y divergencias surgidas con los planteamientos particulares del estudio; del mismo modo, en las cuestiones relevantes para los propósitos de la investigación.

3.3.3.3 Limitaciones

En el transcurso de la aplicación del Análisis Didáctico, en la presente investigación han surgido diversas limitaciones y dificultades que dejan abiertas posibles vías de continuación y mejora para la etapa de revisión de antecedentes en futuros estudios. Exponemos a continuación las que nos parecen más significativas:

1. En relación al control sobre las fuentes y tipos de información, se han descartado conscientemente para su revisión algunas fuentes relevantes, por no lograrse para ellas el acceso al contenido de texto completo. Tales son los casos de publicaciones periódicas como *Zentralblatt für Didactik der Mathematik*, actas de congresos como las del ICME o bases de datos como MATHDI.
2. Los idiomas considerados en la revisión del conocimiento, se han restringido al español y al inglés, por su familiaridad con ellos.
3. Por la naturaleza de la investigación ejecutada, la extensión procurada en la primera fase y la articulación entre los resultados primarios, secundarios y consecuencias, presentados en el capítulo II, constituyen tan sólo una primera aproximación parcial al campo de conocimientos, complejo y extenso, del número racional en educación matemática.

A pesar de las limitaciones subrayadas, consideramos que la amplitud y profundidad con la que hemos empleado el Análisis Didáctico, en esta ocasión, resultan suficientes para los propósitos establecidos en la investigación realizada.

3.4 METODOLOGÍA DE LA FASE EMPÍRICA

3.4.1 Estudio Descriptivo Evaluativo

El enfoque de investigación es mixto, es decir, cuantitativos y cualitativos (Hernández, Fernández y Baptista, 2003) estos dos enfoques integrados enriquecen el estudio, ambas perspectivas investigativas no son excluyentes ni se sustituyen. El estudio enfatiza la evaluación de la comprensión de los significados del número racional, las cuales son observadas a través de los registros de representación que ostentan los protocolos de resolución de situaciones-problema abierta que se proponen en el cuestionario.

Las fases de esta investigación son:

Primero, realizamos las observaciones del fenómeno de la comprensión a través de un estudio exploratorio sobre las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de los significados de los números racionales positivos (Q^+).

Segundo, establecemos suposiciones como consecuencias de la exploración anterior; Estas suposiciones se ven plasmados en un conjunto de problemas específicos que son periféricos a la problemática general. Se plantea hipótesis iniciales provisionales que durante el proceso de investigación han de ir mutando.

Tercero, procedemos a comprobar el estado en que las hipótesis iniciales sean ciertas. Se realiza el análisis e interpretación de las respuestas a las diversas cuestiones de los instrumentos de recolección de datos.

Cuarto, las hipótesis en discusión son una vez más auscultadas en base a la observación y el estudio teórico a modo de conclusiones.

Quinto, proponemos nuevas perspectivas de investigación y pautas para posteriores evaluaciones de los significados del objeto matemático en cuestión. Grinnell, 1997. (Citado por Sampieri et al. 2003).

Presentamos un esquema del enfoque investigativo en el que se concilian los enfoques involucrados; cualitativo-cuantitativo.

Tabla 3.1

Enfoques de investigación en el contexto de la investigación del número racional

Conocer el fenómeno de comprensión de los significados del número racional. Metas de la investigación*			
	Cuantitativo		**Cualitativo**
Punto de partida	Conocer cómo es la comprensión de los significados del número racional.	⟺	Entender la naturaleza de la comprensión del objeto matemático y descubrir la relación existente entre las representaciones gráficas y simbólicas.
Premisa	La realidad del fenómeno de la comprensión puede conocerse con la mente a través de una reflexión deductiva.	⟺	El individuo construye y da significado a la realidad del fenómeno de la comprensión. En el proceso inductivo se explora, describe y posteriormente se genera perspectivas teóricas.
Datos	Uso de medición y cuantificación.	⟺	Uso del lenguaje natural en la descripción detallada de datos, es decir, situaciones, eventos, conductas observadas y sus manifestaciones.
Finalidad	Se reporta qué sucede. Estudio de hechos que dan información específica sobre la comprensión para poder explicar y predecir.	⟺	Se busca entender el contexto y/o punto de vista sobre la comprensión del objeto matemático en cuestión que ostenta el docente de matemática en formación.

* Elaboración propia en base al texto Metodología de la Investigación de Hernández et al. 2003.

3.4.1.1 Nivel y Tipo de Investigación

El estudio es de nivel descriptivo exploratorio, reporta información sobre el estado actual de la comprensión de los significados de los números racional positivo, en su representación fraccional. La técnica de observación del fenómeno de comprensión fue la aplicación de una prueba. Cabe recalcar que en este estudio no tenemos control de la variable, lo que hacemos es estudiarla en su estado natural.

De acuerdo a la clasificación propuesta por Sierra Bravo (1988), la investigación por su finalidad es del tipo básico, pues, tiene el objetivo de diagnosticar y describir la comprensión y su relación con los sistemas de representación, así mismo, no deja de tener una naturaleza aplicativa ya que sus conclusiones y recomendaciones estarán dirigidos a solucionar el problema de los bajos niveles de comprensión que presentan los docentes en formación.

3.4.2 Población y Muestra de Estudio

La población de estudio está constituido por los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación, de la Carrera Profesional de Educación Ciencias, en la especialidad de Matemáticas y Computación, de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno que realizan sus estudios bajo un sistema curricular rígido, en la condición de alumnos regulares. En el año 2004 estos estudiantes cursaron el tercero, cuarto y quinto nivel de estudios.

Para este estudio se ha seleccionado una muestra intencional, constituida por 60 estudiantes, a quienes se aplicó una prueba en un ambiente natural de aula. La tabla 3.2 recoge la distribución por cursos de la población y muestra participante.

Tabla 3.2
Distribución de la Población y Muestra por Nivel de Estudios Académicos

	Nivel académico			Total
	Tercero	Cuarto	Quinto	
Población	40	41	40	121
Muestra	22	20	18	60

Elaboración propia.

En el informe, cuando nos referimos a estudiantes del tercer, cuarto y quinto nivel, nos estaremos refiriendo a los sujetos que al momento de la aplicación de los instrumentos de evaluación estaban cursando el quinto, séptimo y noveno semestres de formación profesional. Valga la aclaración para evitar las confusiones con los niveles de desempeño u otro tipo de clasificación por estratos.

Por ser éste un estudio de carácter exploratorio, no hemos prestado excesiva atención al tamaño ni a las características de la muestra. Tan sólo hemos procurado abarcar a los que pertenecen a distintos niveles de estudio. Podemos afirmar también que en el criterio utilizado para la selección de la muestra tuvo que ver la accesibilidad a este grupo de estudiantes.

Tan sólo hemos buscado un primer grupo de alumnos con los cuales poder iniciar la observación empírica de comportamientos, ante tareas especiales previamente diseñadas. Reconocemos que el procedimiento de selección seguido no garantiza la representatividad de la muestra, aunque conviene recordar que éste es un aspecto que no nos interesa certificar en esta fase del estudio.

3.4.3 Procedimiento de Recolección de Datos

La recolección de la información, de naturaleza básicamente cualitativa, fue a través de la aplicación del cuestionario en forma individual en el salón de aula. Los estudiantes resolvieron las cuestiones en un tiempo aproximado de 60 minutos. Al inicio se explicó las intenciones de la prueba y se invitó a leer las instrucciones de la prueba antes de comenzar con la resolución de los ítems. Durante la sesión de aplicación del instrumento se hizo algunas aclaraciones, si el estudiante así lo requería. El carácter cualitativo del estudio demandó enfatizar en las descripciones detalladas de las respuestas, por esta razón, se pidió al estudiante escribir su respuesta acompañada de los cálculos necesarios para encontrar la solución. Desde la perspectiva empírica, el centro de interés son los conceptos subyacentes detrás de las respuestas observables de los alumnos a las diferentes preguntas referentes a interpretación de las fracciones.

3.4.3.1 Descripción y análisis del instrumento de recolección de datos

Para la evaluación de la comprensión de los significados que ostentan los estudiantes se ha diseñado una prueba de seis preguntas, éstas se caracterizan por ser abiertas, porque son más adecuadas para recoger información que pueda quedar oculta con preguntas cerradas o de alternativa múltiple.

El instrumento tiene un conjunto de orientaciones como “Instrucciones para responder al cuestionario”, seguidamente, se proponen las seis cuestiones organizadas según los significados del número racional. En este instrumento se propone dos cuestiones sobre el significado “parte-todo continuo” y “parte-todo discreto”, la tercera pregunta evalúa el significado de “cociente”; la cuarta, la “medida”; la quinta, la “razón”; y finalmente, el significado de “operador”. De los seis enunciados, sólo el cuarto tiene una representación gráfica de segmentos. En lo posible se ha procurado que los enunciados se hallen sin el auxilio de gráficos, con la finalidad de dejar abierta la posibilidad de que sea el estudiante quien utilice las representaciones gráficas.

Se ha pretendido que los instrumentos de medición registren datos observables que denoten con nitidez los procesos cognitivos involucrados, lo más cercano posible a la variable de interés, se trató de alcanzar este requisito con la formulación de preguntas abiertas, porque estas dan mayor posibilidad de recoger información sobre lo que acontece en el ámbito de las representaciones internas del sujeto, exteriorizadas a través de las representaciones externas que presentan en cada respuesta.

Para acceder a la mayor riqueza de las respuestas se habilitó un espacio determinado "sector de respuestas", en la resolución del problema se sugiere hacer todos los cálculos en el mismo folio, además, se pide no borrar los errores o equivocaciones que cometan para tener pistas sobre sus procesos de solución.

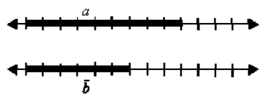
3.4.3.2 Proceso de elaboración del instrumento de evaluación

En este numeral se explica el proceso de formulación del instrumento de recolección de datos: "Prueba sobre comprensión de los significados del número racional". Además, se explica las intenciones, el objetivo de cada cuestión, las posibles respuestas y las representaciones utilizadas en forma pertinente en la solución de cada situación problemática, respuestas que se consideran correctas, grado de dificultad y si son necesarias las observaciones. (Rodríguez, 2005).

La secuencia del proceso de construcción del instrumento se inicia con la definición de los significados del número racional, para esta tarea se tomó como documento orientador el libro de Gairín y Sancho (2002); luego, se exponen los objetivos de cada ítem, que en la tabla 3.3 se muestra como "Desempeño esperado", es decir, las habilidades que deberán mostrar los sujetos. Estas habilidades están referidas a la comprensión de los cinco significados más usuales que tienen los números racionales: la fracción como parte-todo, cociente, medida, razón y operador. Paso seguido, se formula una pregunta por cada desempeño esperado, tal como muestran los cuadros que a continuación se exponen:

Tabla 3.3

Matriz de Formulación del Instrumento de Recolección de Información sobre Significados del Número Racional

Definición de los significados de número racional, según Gairín y Sancho 2002.		**Desempeño esperado**	**Problemas**
El número racional como "parte-todo": Este significado se da cuando existe la división de una unidad en partes iguales de las que se "destacan" algunas. Las partes en que se ha dividido la unidad son el denominador de la fracción, mientras que las partes que se destacan están indicadas por el numerador. La relación "parte-todo" se presenta cuando un "todo" (continuo o discreto) se divide en partes "congruentes" (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de "objetos"). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios "todos"). El todo recibe el nombre de unidad.	Continuo	Interpreta una situación problemática, enunciada en forma verbal, de la fracción en su significado 'parte-todo continuo' proponiendo una explicación simbólica y gráfica.	1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?
	Discreto	Interpreta una situación problemática de la fracción, enunciada en forma verbal, en su significado 'parte-todo discreto' proponiendo una explicación simbólica y gráfica.	2) Si en una reunión de amigos, tres son chicos y cuatro, chicas, ¿qué fracción del grupo de amigos son chicos?
El número Racional como "cociente": En este caso, la fracción ***a/b*** representa una situación de reparto, en la que se trata de conocer el tamaño de cada una de las partes que resulta de distribuir ***a*** unidades en ***b*** partes iguales.		Interpreta una situación problemática, enunciada en forma verbal, de la fracción en su significado como "cociente" y explica el reparto usando símbolos y gráficas.	3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?
El número Racional como "medida": En este constructo se plantea la necesidad de medir la longitud de un segmento AB tomando como unidad de medida la longitud de un segmento CD, que no está incluido un número entero de veces en el segmento AB. En términos generales se puede decir que la fracción como medida responde a la necesidad de medir una magnitud tomando como unidad de medida otra magnitud de la misma naturaleza que la anterior que no está incluido un número entero de veces en ella. El objeto a medir no siempre será una longitud, puede ser un área, el tiempo, masa, etc.		Interpreta una representación gráfica lineal que trasmite el significado de la fracción como 'medida' y traduce a representación simbólica.	4) De la observación de la figura: ¿qué parte de $\bar{a}$ es $\bar{b}$? , ¿cuánto mide $\bar{a}$? 
El número Racional como "razón": En este constructo *a/b* no representa la partición de ningún objeto o cantidad de magnitud, sino la relación que existe entre dos cantidades de magnitud, la comparación entre los cardinales de dos conjuntos, o la comparación entre una cantidad de magnitud y el cardinal de un conjunto. La comparación se establece entre las cantidades que expresan el numerador y el denominador y, por tanto, el orden en que se citan las magnitudes que se están comparando es esencial. La comparación entre cantidades que indica la fracción ha de entenderse como el tanto por uno, es decir, como la cantidad de la magnitud a que se refiere el numerador que corresponde a cada unidad de la magnitud considerada en el denominador		Interpreta el enunciado problemático que involucra fracciones en su significado de 'razón' a través de una explicación simbólica y o gráfica.	5) En una mesa hay 9 libros, de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?
El número Racional como "operador": En este constructo se parte de un número o figura dada y mediante la realización de operaciones se transforma en un segundo número o figura. Por tanto, se puede interpretar a la fracción como una función de cambio. El trabajo con operadores conecta las fracciones con las propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos, y con propiedades del análisis como son los de composición de funciones.		Identifica la fracción en su significado como 'operador' y lo utiliza para la solución de una situación problemática.	6) En un salón de clases, de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿cuántos aprueban matemática?

Elaboración propia.

El resultado de este proceso es la “Prueba sobre comprensión de los significados del número racional”, el mismo que se presenta en el anexo A.2. A continuación la figura 3.3. exhibe la disposición de los ítem y su formato.

PRUEBA SOBRE COMPRENSIÓN DE LOS SIGNIFICADOS DEL NÚMERO RACIONAL

Apellidos y Nombres :

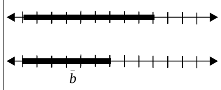
....

Nivel: .... Edad:...............Sexo: M ☐ F ☐ Fecha: ....

INSTRUCCIONES PARA RESPONDER AL CUESTIONARIO

1. Lea atentamente los enunciados y preguntas.
2. Recuerde que para expresar sus respuestas puedes utilizar palabras cotidianas, números, símbolos, figuras, etc.
3. Si no puede responder a la cuestión escriba explicando por qué no puede hacerlo. (No tiene los términos adecuados, no recuerda, lo ignora u otra razón)
4. Si se ha equivocado puede tachar y continúa con la respuesta. (Nunca borrar)
5. Si tiene que hacer cálculos hágalo en la parte en blanco de la misma hoja. De ninguna manera haga sus cálculos en otra hoja.
6. Le rogamos responder las cuestiones en completo silencio para no interrumpir a sus compañeros.

   Agradecemos su gentil cooperación e interés por responder a las cuestiones

Sector “Preguntas”	Sector “Respuestas”
1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	
2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	
3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	
4) De la observación de la figura. ¿Qué parte de la $\bar{a}$ es $\bar{b}$?	
5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	
6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	

Señor Estudiante, gracias por su cooperación.

Figura 3.3 Prueba sobre Comprensión de los Significados del Número Racional

3.4.3.3 Descripción del instrumento de evaluación

Para la evaluación de la comprensión de los significados que poseen los estudiantes, se ha aplicado una prueba de seis preguntas abiertas, porque son las más adecuadas para recoger información que pueda quedar oculta con preguntas cerradas o de alternativa múltiple. Para acceder a la mayor riqueza de las respuestas se sugirió hacer todos los cálculos en el mismo folio, por eso, asignamos un espacio de respuestas; además, se solicitó no borrar los errores o equivocaciones que efectúen para tener pistas sobre sus procesos de solución.

A continuación exponemos en detalle las cuestiones que fueron resueltas por los estudiantes, organizados según los significados descritos en la “Matriz de formulación de instrumento de recolección de información sobre significados del número racional". En la descripción de los ítems se explicita los objetivos, la presentación del enunciado de la pregunta, las conjeturas sobre las posibles respuestas incorrectas, la respuesta considerada correcta, el grado de dificultad y finalmente, las observaciones, si fuera el caso.

Tabla 3.4 a)
Descripción del primer ítem del instrumento de recolección de datos.

Objetivos:	**Enunciado de la pregunta:**	**Posible respuesta incorrecta:**
Averiguar si el alumno puede interpretar el significado parte-todo con cantidad de magnitud continua del número racional, a partir del enunciado verbal, escribiendo su respuesta, utilizando representaciones simbólicas y pictóricas.	1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	$\frac{4}{3}$ (Confundir el todo con la parte)
Respuesta considerada correcta:	**Grado de dificultad:**	**Observaciones:**
El significado que se ha tomado $\frac{3}{4}$ de la unidad. "Tres cuartos de chocolate 	El ítem no tiene distractores, con esto se pretende evaluar realmente el significado parte-todo, el más conocido por los educandos y utilizado en los textos escolares.	Se considerara válida la respuesta si no está acompañada de una explicación o se utilice sólo una representación.

Tabla 3.4 b)
Descripción del segundo ítem del instrumento de recolección de datos.

Objetivos:	**Enunciado de la pregunta:**	**Posible respuesta incorrecta:**
Averiguar si el alumno puede interpretar el significado parte-todo con cantidad de magnitud discreta del número racional, a partir del enunciado verbal, escribiendo su respuesta, utilizando representaciones simbólicas y pictóricas.	2) Si en una reunión de amigos hay tres chicos y cuatro chicas, ¿qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{7}{3}$ (Confundir el todo con la parte)
Respuesta considerada correcta:	**Grado de dificultad:**	**Observaciones:**
La fracción del grupo que son chicos es $\frac{3}{7}$. "tres sétimos" 	Al igual que la anterior este ítem es de fácil solución por ser familiar al estudiante.	Se considerará valida la respuesta si no está acompañada de una explicación o se utilice solo una representación.

Tabla 3.4 c)

Descripción del tercer ítem del instrumento de recolección de datos.

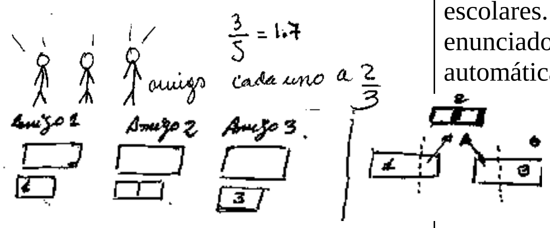
Objetivos:	**Enunciado de la pregunta:**	**Posible respuesta incorrecta:**
Averiguar si los alumnos pueden interpretar el significado de cociente del número racional en el enunciado del problema y proponer solución, utilizando representaciones simbólicas y graficas.	3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{3}{5}$ (Confundir con el significado de parte-todo)
Respuesta considerada correcta:	**Grado de dificultad:**	**Observaciones:**
A cada amigo le corresponde 1 entero y 2/3 de barra de chocolate. 	Se considera de dificultad media porque este significado es utilizado en todos los textos escolares. Además el enunciado conduce casi automáticamente a la división.	Se considera válida la respuesta, 1,666...

Tabla 3.4 d)

Descripción del cuarto ítem del instrumento de recolección de datos.

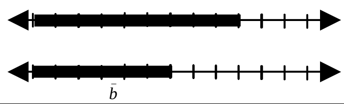
Objetivos:	**Enunciado de la pregunta:**	**Posible respuesta incorrecta:**
Dada una situación esquemática del significado de medida del número racional, presentada a través de una figura de segmentos, averiguar si el alumno logra interpretar el significado de medida de la fracción que transmite la figura.	4) De la observación de la figura. ¿Qué parte de $\bar{a}$ es $\bar{b}$? 	$\frac{9}{6}$
Respuesta considerada correcta:	**Grado de dificultad:**	**Observaciones:**
El segmento ***b*** es igual a los 2/3 del segmento ***a***. El segmento ***b*** es igual a los dos tercios del segmento ***a***.	A pesar de que en este significado esté presente el significado de parte-todo continuo, se prevé que el estudiante tenga dificultades por no ser muy estudiado en el currículo escolar.	Será válida la respuesta 6/9 o 0.66....

Tabla 3.4 e)

Descripción del quinto ítem del instrumento de recolección de datos.

Objetivos:	**Enunciado de la pregunta:**	**Posible respuesta incorrecta:**
Averiguar si el estudiante consigue utilizar el número racional en su significado de razón, en la solución del problema, enunciado verbalmente.	5) En una mesa hay 9 libros, de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\frac{4}{9}$ (Confundir el significado de razón con el de parte-todo)
Respuesta considerada correcta:	**Grado de dificultad:**	**Observaciones:**
El número de libros de investigación está en una razón de 4 a 5 respecto a los libros de matemática. Es decir: $\frac{4}{5}$ 	El grado de dificultad es medio, porque este contenido los estudiantes lo desarrollaron y está presente en los textos escolares junto con las proporciones.	

Tabla 3.4 f)

Descripción del sexto ítem del instrumento de recolección de datos.

Objetivos:	**Enunciado de la pregunta:**	**Posible respuesta incorrecta:**
Dado un enunciado verbal de la situación problemática que involucra el significado de operador del número racional, averiguar si el estudiante logra utilizar la fracción como transformador de un estado o cantidad de magnitud suministrada.	6) En un salón de 35 alumnos, aprueban matemática los 4/5 ¿cuántos aprueban matemática?	
Respuesta considerada correcta:	**Grado de dificultad:**	**Observaciones:**
Aprueban matemáticas $35 \times \frac{4}{5} = 28$ estudiantes.	Este significado es bien conocido por los estudiantes y utilizado en los contenidos de razonamiento matemático, por eso, se califica de dificultad media.	Se considerará válida toda respuesta que utilice cálculos correctos que implique multiplicación por 4 y división entre 5 u otros análogos.

Elaboración propia.

3.4.4 Análisis de datos

La presentación, descripción y análisis de la información se realiza desde la perspectiva cuantitativa y cualitativa. La primera, recurre a los recursos estadísticos de carácter descriptivo, esencialmente tablas porcentuales y gráfico de barras. La segunda, se limita a la presentación de casos típicos de respuesta, que son objeto de análisis de contenido, en base a las representaciones externas de los protocolos de resolución de las situaciones problema.

La fuente de datos son las 60 pruebas que resolvieron los estudiantes. Como cada prueba tiene 6 cuestiones propuestas, el conjunto de datos está conformado por 360 respuestas distribuidas en tres semestres de estudio de formación profesional.

3.4.4.1 Presentación cuantitativa de resultados

En las tablas se organizan los datos porcentuales de las respuestas correctas por cada uno de los ítems. Para las descripciones y análisis se maneja la cifra total y quedan como un simple referente las cifras porcentuales por nivel de estudio.

La secuencia del tratamiento de esta información es la siguiente:

l. Clasificación y codificación de las pruebas. El código está signado por dos numerales, por ejemplo: 3-1 significa primer estudiante del tercer nivel de estudios de formación profesional.

2. Presentación en tablas según nivel de estudio de las respuestas originales a la “Prueba sobre comprensión de los significados del número racional”. La integridad de las respuestas presentadas por los estudiantes son escaneados y organizados en tablas que se adjuntan en los anexos. Estos protocolos están clasificados por el tipo de respuesta y los tipos de registros de representación que utilizan en la resolución.

4. Descripción estadística de los datos obtenidos con el cuestionario. Se ha organizado tablas de “Muestras de desempeño” interpretativo de los significados del número racional según nivel de estudio. Cada tabla expone el porcentaje de los diferentes tipos de respuestas por cada significado: Empleo Propio Correcto (EPC), Empleo Propio Incorrecto (EPI), Interferencia Externas (IE), Interferencia Interna (II) y Dudosas (D).

5. Además de las tablas de síntesis, se elabora gráficos de barras, que tienen el objetivo de ilustrar el estado de la problemática.

6. Con la intención de exponer el tipo de representaciones que utiliza el estudiante, se diseñó la tabla titulada: "Tipos de representaciones en las respuestas a la Pregunta Nº ___" por cada pregunta según el nivel de estudio.

7. Con el objetivo de presentar pruebas empíricas sobre la interferencia del significado parte-todo en los demás significados, al momento de solucionar la cuestión, se ha organizado tablas denominadas "Interferencias en las respuestas al problema del número racional".

3.4.4.2 Análisis cualitativo de resultados

El análisis se refiere a la tarea de codificación, clasificación, agrupación y manipulación de datos (transcripciones, escaneados, señalización de indicios, señalización de regularidades de incidencias o patrones), interpretación de regularidades.

Según Huberman y Miles (1994) citado por Coffey y Atkinson (2003), el análisis de los datos cualitativos en este estudio pasa por tres sub-procesos relacionados entre sí:

a) Reducir los datos, implica la selección y condensación de la información, aquí se resume, codifican y descomponen en grupos y categorías.
b) Exponer los datos: aquí se describe las formas cómo los datos reducidos se despliegan en formas visuales, por medio de diagramas o de cuadros, a fin de mostrar lo que implican, es así que para Huberman y Miles la exposición de datos es como un "ensamblaje organizado y comprimido de información que permite sacar conclusiones o actuar".
c) Sacar y verificar las conclusiones: aquí se interpreta los datos antes expuestos y se extrae sus significados. Las tácticas a emplearse son: buscar casos contrastantes y comparativos; observación y exploración de temas, identificación de patrones y regularidades, usando metáforas.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE SIGNIFICADOS EN LIBROS DE TEXTO

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se exhiben los resultados del análisis de los libros de texto de matemática del primer grado de educación secundaria. Se analiza la presencia de los significados del número racional, sus representaciones, análisis fenomenológico, revisión de los elementos metodológicos y una selección de las ilustraciones más representativas. El estudio de los significados pretende identificar, clasificar y aportar elementos que sitúen la comprensión de los significados de los estudiantes de formación pedagógica en un contexto escolar concreto y aportar elementos de juicio que expliquen el impacto de las representaciones en la comprensión de los significados del número racional en el currículo de matemática.

La relación existente entre el currículo oficial y los libros de textos influyen de forma considerable en la comprensión de los significados del número racional. Los libros escolares son unos instrumentos de desarrollo del currículo, además de un material para la enseñanza debiendo, por tanto, configurar una determinada comprensión.

Los libros de texto que circularon en el sistema escolar por más de cincuenta años como es el caso de la muestra de nuestro estudio, influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, por cuanto, presentan una determinada organización de formato, secuencia de nociones matemáticas, unos determinados problemas y unas orientaciones metodológicas, una epistemología y fenomenología, por lo que consideramos que son una condicionante importante en el tipo de enseñanza y aprendizaje.

El sustento teórico para la valoración de los libros de textos se centra en la naturaleza de las matemáticas, como resultado cultural, a través de la reestructuración del currículo desde los contenidos y el propio proceso de enseñanza. El estudio de los números racionales se concretiza a través de la utilización de situaciones, representaciones y modelos que soporten una secuencia que permita la extensión de un conjunto numérico a otros de forma comprensiva. La importancia de los distintos sistemas de representación del concepto de número racional y las actividades cognitivas de formación, transformación y conversión, permiten un tratamiento adecuado para su comprensión. (Duval, R. 1995). La relatividad del saber se analiza con la teoría de la **Transposición Didáctica** (Chevallard, 1991), el cual se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado el que se puede detectar en los libros de texto. La transposición didáctica ayuda a analizar el proceso de transición del saber académico en saber ha ser enseñado que se puede advertir en los libros de texto, además de algunas creaciones propias del sistema didáctico como consecuencia de la trasposición interna y descubrir las causas por las cuales se generaron significados inadecuados de los objetos matemáticos transmitidos en la enseñanza.

En este capítulo, se indaga y reflexiona sobre el análisis de libros de textos matemáticos a través de un enfoque cualitativo. En el capítulo siguiente, se provee el sustento empírico para explicar los resultados del análisis de los libros texto, análisis que se realiza en forma reflexiva y valorativa, mas no como crítica.

4.2 PROPÓSITOS DEL ESTUDIO

En la enseñanza de la matemática del nivel secundario, los libros de texto son uno de los principales y clásicos materiales educativos para favorecer el aprendizaje. A pesar de esta importancia se constata fácilmente muchas limitaciones, como a primera vista se encontró en la presentación y diagramación de los textos. La presentación de los mismos puede influir en la motivación del aprendiz ya que la forma en que exponen los contenidos, introducen y desarrollen los conceptos, pueden influir en qué aprenden y cómo aprenden. Si admitimos que el libro constituye uno de los materiales de enseñanza y recurso de aprendizaje de mayor importancia, además de ser una fuente de actividades de extensión y tareas; entonces, será necesario evaluar y analizar estos libros de texto, así como la forma como desarrollan los significados del número racional. Asimismo, se analiza si el modo en que se introducen los números racionales con relación a sus diferentes significados reflejados en los textos, determinan, en cierta medida, la comprensión de este concepto .

El propósito del análisis de los significados del número racional en los libros de texto es conocer el saber didáctico del concepto de fracción. Esta aproximación permite un conocimiento sobre las formas de presentar fracciones, como una representación simbólica del número racional y sus significados en los libros de texto.

Este estudio tiene los siguientes objetivos:

- Identificar y analizar el contenido “Números Racionales” mediante los criterios: programa curricular al que corresponde, año de edición, conceptos, significados, sistemas de representación, análisis fenomenológico, problemas representativos e ilustración representativa.
- Evidenciar los significados subyacentes en el desarrollo del concepto de los números racionales.
- Poner de manifiesto los distintos sistemas de representación del número racional utilizados por los textos para facilitar su compresión.

El estudio evalúa la presencia de los significados en los libros de texto como un mejor criterio de exposición del concepto de número racional a fin de promover una comprensión más integral de este objeto matemático.

Para la consecución de estos propósitos se estableció los siguientes criterios de observación y análisis.

- Identificación de los significados y concepto del número racional en el libro de texto.
- Selección y presentación de ilustraciones más significativas sobre los significados.
- Identificación de las representaciones y evaluación de sus transformaciones y conversiones.
- Análisis de los elementos fenomenológicos que utiliza el autor para introducir el concepto de número racional y sus significados.
- Identificación y valoración de los aspectos históricos que se utiliza en cada capítulo o unidad de número racional, en los libros de texto.
- Valoración de los aspectos metodológicos, las intenciones u objetivos de la unidad, la manera de presentar y enunciar los ejercicios y problemas, además, de los errores de concepción que eventualmente se puedan identificar.

La valoración de la presencia y desarrollo de los criterios se realizó mediante una evaluación del contenido en cada uno de los textos y para cada uno de los criterios.

4.3 ELEMENTOS DE ANÁLISIS

Los elementos de análisis son los contenidos matemáticos presentados en los libros de texto de primer grado de estudios y en algunos casos de segundo grado. El objeto matemático, materia de evaluación, es el concepto de número racional y cómo el autor lo desarrolla en el proceso didáctico y si utiliza los diferentes significados.

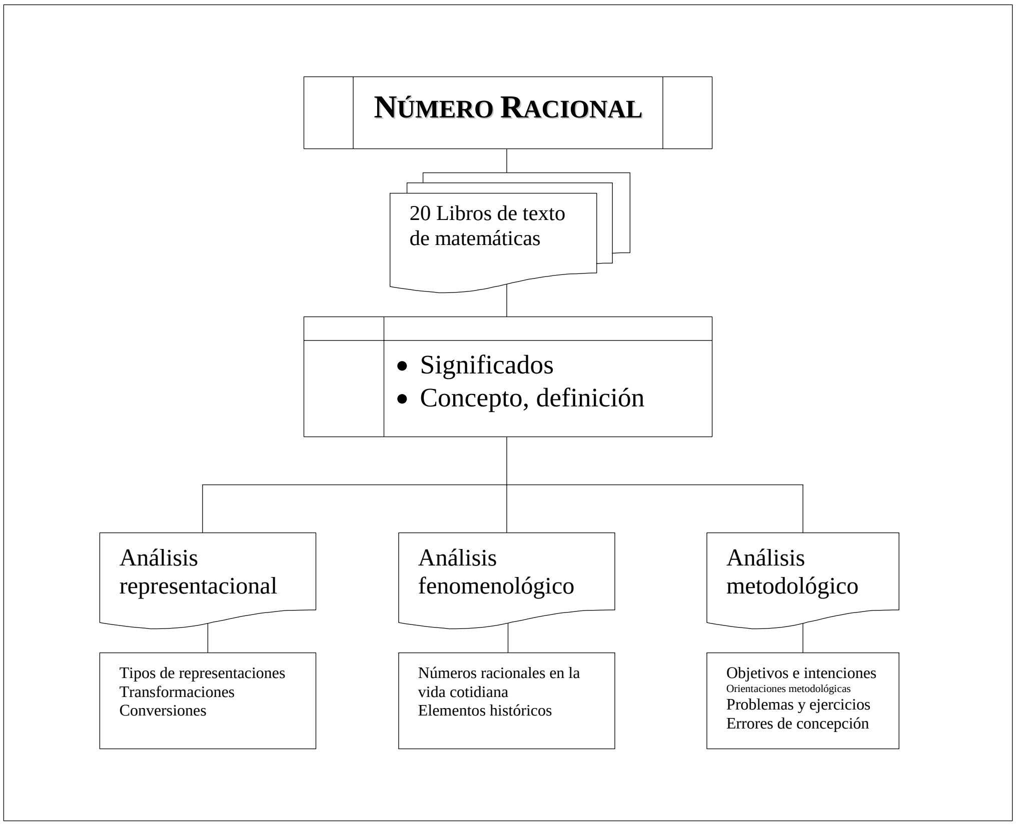


Figura 4.1 Elementos de Análisis de los Libros de Texto

4.3.1 Muestra de los Libros de Texto

La muestra de libros de texto para el análisis estuvo conformada por 20 libros de texto de matemáticas del nivel secundario, dieciséis de primero y cuatro de segundo grado. Los libros de texto pertenecen a los años comprendidos entre 1963 y 2004, editados por diferentes editoriales. Durante los años comprendidos entre 1982 y 1975 el contenido números racionales se estudió en segundo grado. El número de autores es trece, tres de los cuales con una larga trayectoria en la publicación de libros de texto. En estos últimos autores se observa la evolución de los contenidos entre sus diferentes ediciones.

La selección de la muestra no fue aleatoria, el criterio de selección fue la accesibilidad a los textos sobre todo con los más antiguos, por ser estos de difícil acceso. La tabla. 4.1 describe la muestra distribuida según el año de edición, autor, lugar de edición, grado de estudio y programa curricular al que corresponde; además se asigna un código a cada libro de texto con la finalidad de simplificar la identificación.

Algunas limitantes halladas en el proceso de indagación realizada en los libros de texto son el limitado número de textos de la muestra, lo ideal hubiera sido evaluar mayor cantidad de textos distribuidos homogéneamente en todo el siglo XX; otra limitante fue la dificultad para rastrear los documentos curriculares que orientan la enseñanza de la matemática en el período de estudio. Por la naturaleza del estudio el análisis se limita a las páginas que explican el concepto y significados de número racional, como podrá observarse no se analiza otras nociones referentes a los racionales como las operaciones básicas, sus propiedades, etc. Otra limitante respecto a la noción de estudio es que no se logra encontrar referencias explícitas de los significados del número racional. Ante la fuerte tendencia a construir los racionales desde la *clase de equivalencia*, será necesario buscar en el desarrollo de las unidades, en las ejemplificaciones, definiciones, conceptos, ejercicios desarrollados y propuestos, algunos rasgos presentes de los significados en un esfuerzo por sustentar la fenomenología que se oculta tras la matemática moderna.

Tabla 4.1

Cuadro de Identificación y Codificación de los Textos Escolares

Nº	Año	Nombre del Autor	Código	Título del Texto Escolar	Lugar de Edición	Editorial	Grado	Programa o Diseño Curricular al que Corresponde
1	2004	Vera Gutiérrez, Carlos Estuardo	L.T. 2005	Matemática Primer grado	Lima	El Nocedal	Primero	R. M. Nº 019-2004. Programa Estratégico Nacional de Desarrollo Curricular. Diseño Curricular Básico.
2	2003	Coveñas Naquiche, Manuel	L.T. 2003-A	Matemática 1 Educación Secundaria	Lima	Bruño.	Primero	Reconocido por el MED-2002 Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores. Una Nueva Secundaria
3	2003*	Rojas Poémape, Alfonso	L.T. 2003-B	Matemática 1 Educación Secundaria	Lima	San Marcos	Primero	
4	2003*	Bustamante Montealegre, Pedro.	L.T. 2003-C	Matemática 1 Texto Integrado	Arequipa	Independencia	Primero	
5	2003	Quijano Hiyo, Jorge y Carretero Mendoza, Gustavo	L.T.2003-D	Matemática 1	Lima	Kano	Primero	
6	2000	Obra Colectiva. Dir. Lohmann Catalina	L. T. 2000-A	Símbolo 1. Matemática Secundaria	Lima	Santillana	Primero	
7	2000	Valencia, Parisaca, Victor H. y Candia Quenta, Hermelinda.	L.T. 2000-B	Matemática I	Puno	Cadena del Sur Ñaupa's	Primero	
8	1997	Obra Colectiva. Dir. Ibarra Morelli, Carmen	L.T. 1997	Matemática 1 Secundaria	Lima	Santillana	Primero	
9	1995	Romero Mendez, Rubén	L.T. 1995	Matemática 1	Lima	Magisterio	Primero	
10	1993	Gutierrez M. Virgilio	L.T. 1993	Matemática Primer Grado de Secundaria	Lima	Omega	Primero	
11	1992	Rojas Gasco, Gustavo	L.T. 1992	Matemática 1 Teoría y Practica.	Lima	Ambers	Primero	Programa Curricular del Primer Grado de Secundaria de 1989
12	1991	Vasquez Urday, Carlos Emilio	L.T. 1991	El Mundo de la Matemática 1	Lima	Stella	Primero	
13	1990*	Romero Mendez, Rubén	L.T. 1990	Matemática 1 La Nueva Estructura de la Matemática	Lima			
14	1982	Cruz Solórzano, Máximo de la	L.T. 1982	Matemática 2do. Grado de Educación Secundaria	Lima	Brasa	Segundo	
15	1976	Vega Villanueva, Flavio	L.T.1976-A	Matemática Moderna 2	Callao	Colegio Militar Leoncio Prado	Segundo	
16	1976	Romero Mendez, Rubén	L.T.1976-B	Matemática Moderna 2	Lima	Universal	Segundo	
17	1975	Cruz Solórzano, Máximo de la	L.T. 1975	Matemática Moderna 2	Lima	Labrusa	Segundo	Programa Adaptado
18	1974	Cruz Solórzano, Máximo de la	L.T. 1974	Matemática Moderna 1	Lima	Arica	Primero	Programa Generalizado.
19	1963	Vega Villanueva, Flavio	L.T.1963-A	Matemática 1er. Año de Educación Secundaria	Callao	Colegio Militar Leoncio Prado.	primero	Programa Oficial de 1963.
20	1963	Romero Mendez, Rubén	L.T.1963-B	Matemática Primer año	Callao	Colegio Militar Leoncio Prado.	Primero	

* Por razones comerciales se suele no consignar el año de edición. En estos casos se ha estimado el año. Elaboración propia.

4.3.2 Instrumentos de Recolección de Datos

En este apartado se describe la estructura y contenido del instrumento de recolección de datos para el análisis del concepto y significado del número racional en los libros de texto, así como, el formato y la presentación del instrumento.

4.3.2.1.Dimensiones o variables de estudio

El instrumento diseñado para el análisis del contenido está constituido por seis aspectos de análisis:

i. **Presentación de los significados y conceptos del número racional**: en este punto se identifica la presencia de los cinco significados: parte-todo, medida, cociente, operador y razón; además, se analiza el concepto del número racional que el autor propone para su aprendizaje.

ii. **Selección de ilustraciones significativas**: luego de una selección se presenta la figura más representativa que ilustra el concepto y significados que el autor maneja en el libro de texto. Los criterios de selección son: esteticidad, representatividad del significado y ser el más usual en el texto.

iii. **Análisis de sistemas de representación**: se identifica los tipos de representación, además se distingue el más utilizado. Se realiza un análisis de la transformación al interior de cada representación y las conversiones entre los registros de representación. Finalmente, se hace un juicio valorativo sobre las preferencias por cada tipo de transformación y conversión.

iv. **Análisis fenomenológico:** Se estudia la naturaleza de los números racionales, su práctica matemática, lo que implica estudiar la naturaleza de la actividad, para propiciar en el estudiante una genuina experiencia matemática. Según Freudenthal (1983), el material necesario para una fenomenología didáctica del número racional será necesario:

- El conocimiento matemático de números racionales.

- Sus aplicaciones: la capacidad de darle aplicaciones del concepto a la vida cotidiana.
- Su historia: En este acápite se revisa la utilización de elementos de la historia de la matemática, se valora si los elementos históricos se utilizan como recurso didáctico en el desarrollo del estudio del número racional, se evalúa si los hechos históricos son pertinentes, y están relacionados con el contenido que se estudia.
- Los procesos reales de construcción del número racional y adquisición de los significados que el libro de texto puede provocar.

v. **Análisis metodológico**: Se identifica si las intenciones y objetivos son explícitos o implícitos. Se aprecia las orientaciones metodológicas, si es que los hubiera. Un elemento de análisis en este aspecto son los ejercicios y enunciados de los problemas. Finalmente, se señalan los posibles errores de concepción.

De todo lo expuesto se puede concluir que los aspectos considerados para el análisis buscan ser exhaustivos en lo referente al foco del análisis que son los significados y el concepto de número racional expuestos en los libros de texto.

4.3.2.2 Estructura y contenido del instrumento de análisis

El registro de la información, la forma de presentar los conceptos, significados, representaciones y fenomenología del número racional y las orientaciones metodológicas fue recogido en una parrilla que permite la consulta y el estudio pormenorizado de los diferentes organizadores en los respectivos textos escolares.

La presentación y formato del instrumento es una parrilla de cinco celdas principales en un folio, en las que cada celda recoge los datos de análisis: significados y conceptos, lustraciones, representaciones, fenomenología y metodología.

Concluimos este apartado con la presentación del instrumento con sus respectivas orientaciones para el análisis de cada aspecto, como se puede ver en el gráfico siguiente:

Tabla 4.2
Valoración Cualitativa de los Significados y Conceptos del Número Racional:
Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código L.T. xxxx)

1. Significados y Conceptos	**2. Ilustraciones Representativas**	**3. Análisis Representacional**
¿Cuál es la definición o concepto de número racional que expone el texto? ¿Qué significados están presentes en la exposición de los números racionales?	Ilustraciones que representen los significados del número racional. Esteticidad.	**Tipos**: ¿Qué representaciones utiliza para exponer el concepto y significado de Q?
		Transformaciones: ¿Qué tipo de transformaciones se realizan en la exposición del contenido?
		Conversiones: ¿Qué tipo de conversiones se encuentra en el tratamiento de las representaciones?

4. Análisis Fenomenológico	**5. Aspectos Metodológicos**
Aplicaciones a la vida cotidiana: ¿Los ejemplos, ejercicios y problemas están contextualizados a la vida cotidiana del estudiante? ¿El desarrollo de los números racionales muestra aplicaciones, situaciones que modelen fenómenos de la realidad?	**Objetivo s e intenciones:** ¿Se enuncia las intenciones, objetivos de la unidad o capítulo?
	Orientaciones metodológicas: ¿Qué orientaciones metodológicas se encuentran en los textos?
Elementos históricos: ¿Qué elementos históricos de la matemática se utilizan como auxiliares didácticos? ¿Estos elementos históricos son utilizados como recurso didáctico en forma oportuna y pertinente?	**Problemas y ejercicios representativos:** ¿Qué orientación tiene el enunciado de los ejercicios y problemas?
	Errores de concepción: ¿Se logra percibir errores en la presentación de los contenidos?

La forma como está diseñado el instrumento permite tener una visión integral de los aspectos que interesa considerar para una evaluación del tratamiento didáctico de los significados y conceptos del número racional. Permite también, cruzar información entre cada uno de los aspectos. Así, se puede interrelacionar el primero con los demás. El aspecto fenomenológico está relacionado con los tipos de ejercicios y problemas de la parte metodológica. Es también importante la relación que podemos establecer entre las representaciones y su tratamiento con la metodología. Por todo lo explicado, podemos aseverar que el instrumento goza de una considerable rigurosidad y exhaustividad, para un primer estudio exploratorio descriptivo de los libros del texto que se utilizan en la educación secundaria.

4.4 SIGNIFICADOS EN LA CONCEPTUALIZACIÓN DEL NÚMERO RACIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones tiene una orientación fundamentada en la utilización casi exclusiva de las representaciones simbólicas, con un acentuado abuso de resolución de ejercicios y un predominio del significado parte-todo. A continuación presentamos algunas formas típicas de presentación de este tópico en textos escolares peruanos que respaldan las primeras premisas.

En cuanto a los resultados de la valoración cualitativa; la organización de la información recogida en los libros de textos ha facilitado la evaluación valorativa de los significados del número racional en relación a los criterios seleccionados, éstos se presentan a continuación.

4.4.1 Exposición de Resultados

La necesidad de rastrear la forma cómo se explica los significados del número racional y presentar su concepto en los libros de texto obedece a:

- Identificar en el tratamiento del concepto de número racional los significados presentes en forma explícita en el discurso didáctico de los libros de texto.
- Evidenciar que existe una brecha entre el saber matemático de los académicos y el saber ha ser enseñado.
- Identificar elementos matemáticos generados por el propio sistema didáctico para atender ciertas necesidades de instrucción. A veces el sistema didáctico produce nociones tergiversadas del saber matemático académico como resultado de una especie de transposición didáctica interna del sistema didáctico, como por ejemplo, el significado parte-todo del número racional.
- Analizar los diferentes tipos de representaciones y sus procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión.
- Indagar en los libros de texto de educación secundaria ¿por qué el significado parte-todo prevalece sobre los otros significados del número racional?

Por la forma como se aborda el concepto de fracción y número racional se vislumbra hasta tres períodos un tanto amalgamados temporalmente. Primero, los libros de texto de la década del 60; segundo, los libros de los años 70, 80 y parte del 90; y, tercero, los que corresponden al período actual que tienen su comienzo en los años 95 hasta la actualidad. El primer grupo, se caracteriza por su abordaje casi intuitivo del número racional. El segundo, por su marcada adopción de la matemática moderna que define el número racional como una clase de equivalencia. En el último período, se encontró que se añade al número racional, como clase de equivalencia, algunos rasgos del primer período.

Tabla 4.3
Clasificación de la muestra en períodos de estudio

	Período A	**Período B**	**Período C**
Años	Década del sesenta	Década del setenta hasta parte del noventa	De la mitad el noventa hasta la actualidad
Libros de Textos Codificados*	L.T. 1963- A; L.T.1963-B	L.T.1974; L.T.1975; L.T.1976-A; L.T.1976-B; L.T.1982; L.T.1990; L.T. 1991 L.T.1992; L.T.1993; L.T.1995.	L.T.1997; L.T.2000-A; L.T.2000-B; L.T.2003-A; L.T.2003-B; L.T.2003-C; L.T. 2003-D L.T.2005.
Orientación	Tradicional	Conductista “Matemática moderna”	Constructivista

* En la descripción para referirnos a los libros de texto de educación secundaria los llamaremos por su código: (L.T. 19____).
Elaboración propia.

A continuación se describe las características de los tres períodos:

4.4.2 Los Significados en la Construcción del Concepto de Número Racional

4.4.2.1 Período A: Matemática Tradicional

Los libros de texto L.T. 1963-A y L.T. 1963-B, del primer grado de educación secundaria, introducen la fracción como resultado de la partición de una unidad en partes iguales al que llaman “parte alícuota de la unidad” que revela el significado parte-todo. La introducción de la fracción se sustenta en la imposibilidad de representar el cociente de dos números enteros primos entre sí, sin embargo, no se explicita el significado de cociente indicado, escondido tras esta forma de conceptuar la fracción y los números racionales.

La definición de número racional que se emplea es: ‘el conjunto de números enteros y el conjunto de los números fraccionarios’, definición que adolece de imprecisiones, ya que no se explica qué se entiende por número fraccionario, dejando abierta la posibilidad de considerar, por ejemplo, $\pi/2$ como un número racional.

En consecuencia, el significado de número racional utilizado para su definición es el de parte-todo, argumentando la necesidad de extender el conjunto de los números enteros, sin llegar a concretar ni explicitar el significado de cociente indicado.

En conclusión, la ruta de construcción del concepto de número racional que se sigue en este período es el que se ajusta el siguiente diagrama:

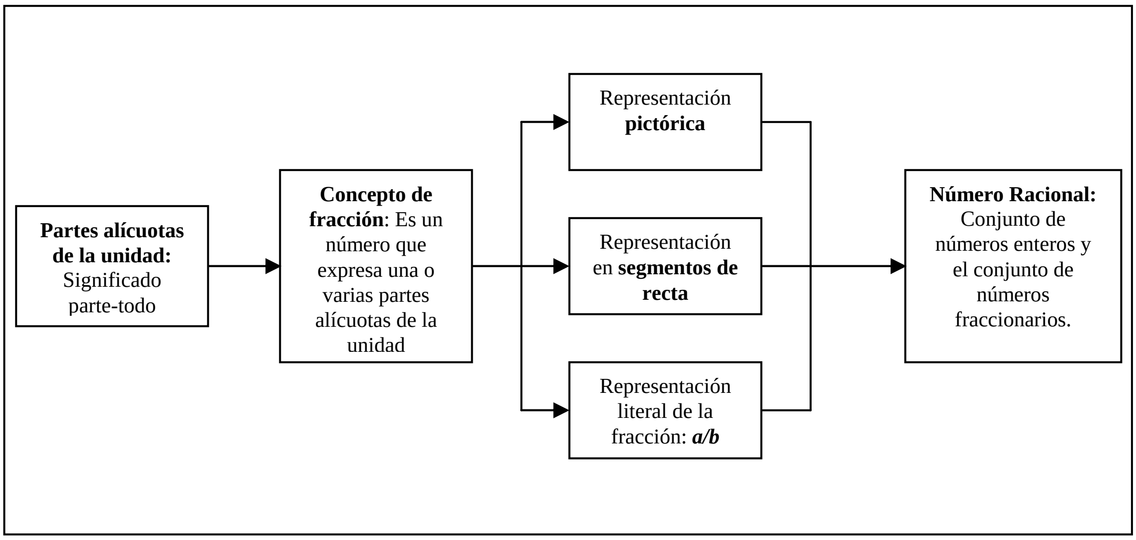
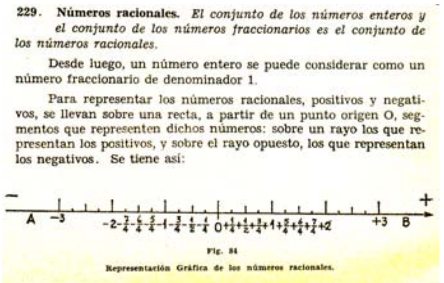
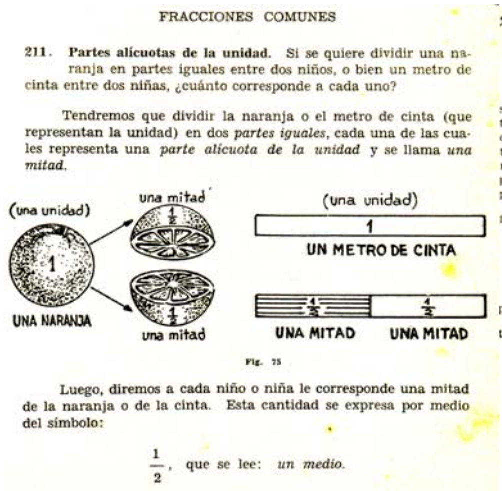
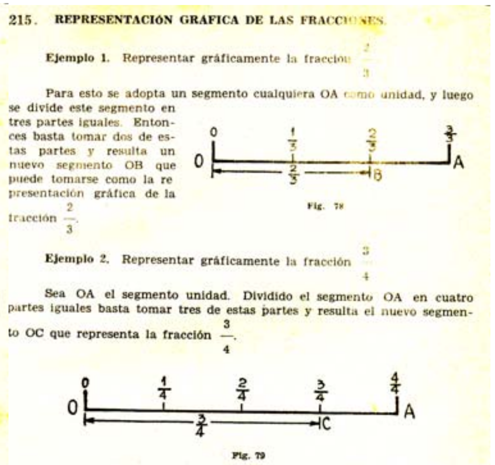


Figura 4.2 Ruta de construcción del concepto de número racional en el período A.

A continuación se exhiben las tablas de recolección de datos con la información organizada, correspondientes al período A de estudio.

Tabla 4.4

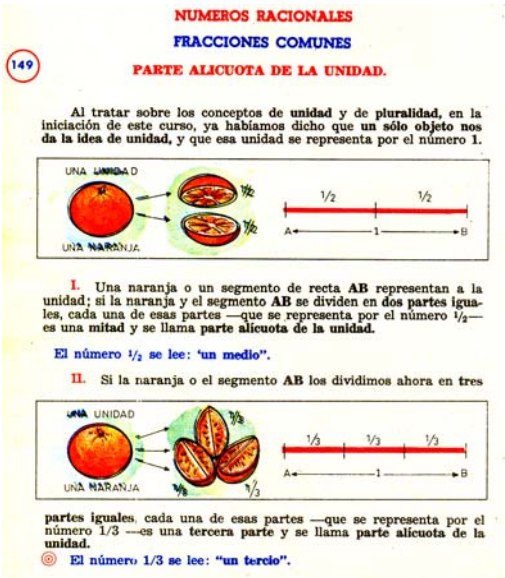
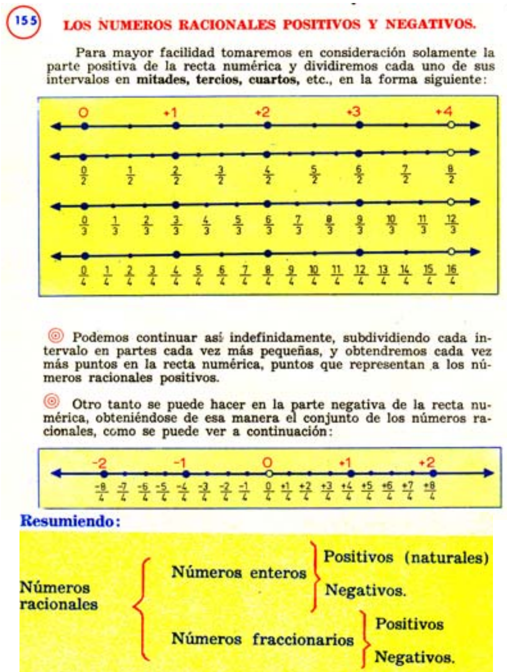
Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1963-A)

Significados y conceptos	Ilustraciones representativas	Análisis representacional
Definiciones: *"Parte alícuota de la unidad es cada una de las que resulta al dividir la unidad en cierto número de partes iguales."* Pág. 187. *"Concepto de fracción. Fracción o quebrado es el número que expresa una o varias partes alícuota de la unidad entera"*. Pág.187. (Parte-todo) En la página 203 se presenta el concepto de: "*Número racional. El conjunto de los números enteros y el conjunto de los números fraccionarios es el conjunto de los números racionales"*.  229. **Números racionales.** *El conjunto de los números enteros y el conjunto de los números fraccionarios es el conjunto de los números racionales.* Desde luego, un número entero se puede considerar como un número fraccionario de denominador 1. Para representar los números racionales, positivos y negativos, se llevan sobre una recta, a partir de un punto origen O, segmentos que representen dichos números: sobre un rayo los que representan los positivos, y sobre el rayo opuesto, los que representan los negativos. Se tiene así: Fig. 84 Representación Gráfica de los números racionales. EL significado fracción que maneja este autor es la de parte-todo, que en estos años se solía llamar *parte alícuota de la unidad* .	 FRACCIONES COMUNES 211. **Partes alícuotas de la unidad.** Si se quiere dividir una naranja en partes iguales entre dos niños, o bien un metro de cinta entre dos niñas, ¿cuánto corresponde a cada uno? Tendremos que dividir la naranja o el metro de cinta (que representan la unidad) en dos *partes iguales*, cada una de las cuales representa una *parte alícuota de la unidad* y se llama *una mitad*. Fig. 75 Luego, diremos a cada niño o niña le corresponde una mitad de la naranja o de la cinta. Esta cantidad se expresa por medio del símbolo: $\frac{1}{2}$, que se lee: *un medio.*  215. **REPRESENTACIÓN GRAFICA DE LAS FRACCIONES.** **Ejemplo 1.** Representar gráficamente la fracción $\frac{2}{3}$ Para esto se adopta un segmento cualquiera OA como unidad, y luego se divide este segmento en tres partes iguales. Entonces basta tomar dos de estas partes y resulta un nuevo segmento OB que puede tomarse como la representación gráfica de la fracción $\frac{2}{3}$. Fig. 78 **Ejemplo 2.** Representar gráficamente la fracción $\frac{3}{4}$ Sea OA el segmento unidad. Dividido el segmento OA en cuatro partes iguales basta tomar tres de estas partes y resulta el nuevo segmento OC que representa la fracción $\frac{3}{4}$. Fig. 79	**Tipos**: - Simbólica numérica y verbal. - Gráfica pictórica y en la recta numérica. - Existe una pequeña distinción entre la representación en la recta numérica (Pág. 203, que representa los racionales positivos y negativos) y la representación gráfica de segmentos, como se muestra en la figura adjunta. - Representación "literal": Término que utiliza el autor para representar una fracción de forma general *a/b*, **Transformaciones**: Transformación de fracciones impropias en números mixtos. Transformación de un entero en fracción impropia. Simplificación. Reducción de fracciones a mínimo común denominador. En lo que el autor llama "Variación del valor de una fracción", se discute las variaciones que ocurren cuando se multiplica el numerador o el denominador por un número natural y el caso de multiplicación de ambos términos de la fracción por un número. **Conversiones**: En la definición de Q: De la recta numérica → simbólica numérica. De numérica → verbal y viceversa De pictórica → simbólica y viceversa. En especial cuando se discute las variaciones del valor de la fracción.

Análisis fenomenológico	Aspectos metodológicos
Aplicaciones a la vida cotidiana: En términos generales la introducción del concepto de número racional se trabajo de forma descontextualizada. La exposición de las nociones matemáticas es de forma fría sin relación con situaciones de la vida cotidiana u otros significados que ostentan los racionales en su representación fraccional. Si bien la figura representativa se refiere una naranja y sus medios, más allá de estos no se pudo encontrar otros rasgos de modelización a la realidad a través de las fracciones.	**Objetivos e intenciones:** A diferencia de otros autores se parte de la definición de fracción para llegara definir el número racional. (Pág. 203) **Orientaciones metodológicas:** Se reclama estar de acuerdo con "las nuevas orientaciones de la Matemática Moderna" (Prólogo). **Problemas y ejercicios representativos:** Un tipo de ejercicios que propone son los "Ejercicios orales" de preguntas abiertas como, ¿Qué es una fracción?, Si una manzana se divide en 9 partes, ¿Cuál es la unidad fraccionaria?, Lectura de fracciones, cinco ejemplos de fracciones ordinarias, decimales, propias e impropias, etc. Dentro de los ejercicios escritos se pide por ejemplo ordenar cinco fracciones, ¿Son equivalentes las fracciones ....? ¿Por qué?, ejercicios de variación. Reducir a número entero o mixto: (10 fracciones impropias) Casi todos los ejercicios tiene el objetivo de **reforzar** ya sea de forma oral o escrita los aprendizajes transmitidos en el texto. Así la interrogante ¿Qué es la fracción? tiene la finalidad que el estudiante recuerde el concepto 212 de la página 187.
Elementos históricos: No presenta este elemento.	**Errores de concepción:** El concepto de número racional, según el autor, es la unión del conjunto de números enteros y números fraccionarios. Esta definición deja la posibilidad que esta fracción $\frac{\pi}{2}$ pertenezca al conjunto de los números racionales.

Tabla 4.5

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1963-B)

Significados y conceptos	**Ilustraciones representativas**	**Análisis representacional**
El primer gráfico exhibe el significado de parte-todo de las fracciones. Llama fracción a la parte alícuota de la unidad, por ejemplo, a cada mitad de naranja. En este texto se presenta una definición explícita de la fracción : *"Se llama fracción común o quebrado al número que representa a una o a varias partes alícuotas de la unidad"* Pág. 144. Más adelante se insinúa la conceptualización del número racional, a través de la necesidad de ampliar o extender el conjunto de los números enteros. La imposibilidad de..." *representar el cociente de dos números, en el cual el dividendo no fuese múltiplo del divisor,...".* *"Para suplir esta deficiencia se crearon los números fraccionarios, ampliando de este modo el campo de los números enteros".*Pág. 145. En resumen, los significados que se encuentra en este texto son los de *parte-todo* y de *cociente*. En toda la unidad no se ha encontrado una definición de número racional.	 149 NUMEROS RACIONALES FRACCIONES COMUNES PARTE ALICUOTA DE LA UNIDAD. Al tratar sobre los conceptos de **unidad** y de **pluralidad**, en la iniciación de este curso, ya habíamos dicho que **un sólo objeto nos da la idea de unidad**, y que esa unidad se representa por el número 1. I. Una naranja o un segmento de recta **AB** representan a la unidad; si la naranja y el segmento **AB** se dividen en **dos partes iguales**, cada una de esas partes —que se representa por el número ½— es una **mitad** y se llama **parte alícuota de la unidad.** El número ½ se lee: "un medio". II. Si la naranja o el segmento **AB** los dividimos ahora en **tres** **partes iguales**, cada una de esas partes —que se representa por el número 1/3 —es una **tercera parte** y se llama **parte alícuota** de la **unidad.** El número 1/3 se lee: "un tercio".  155 LOS NUMEROS RACIONALES POSITIVOS Y NEGATIVOS. Para mayor facilidad tomaremos en consideración solamente la parte positiva de la recta numérica y dividiremos cada uno de sus intervalos en **mitades, tercios, cuartos,** etc., en la forma siguiente: Podemos continuar así indefinidamente, subdividiendo cada intervalo en partes cada vez más pequeñas, y obtendremos cada vez más puntos en la recta numérica, puntos que representan a los números racionales positivos. Otro tanto se puede hacer en la parte negativa de la recta numérica, obteniéndose de esa manera el conjunto de los números racionales, como se puede ver a continuación: **Resumiendo:** Números racionales: Números enteros (Positivos (naturales); Negativos.) Números fraccionarios (Positivos; Negativos.)	**Tipos**: Dentro de las visuales están las pictóricas, de segmentos y la recta numérica. En el segundo gráfico se observa la ubicación de ciertas fracciones en una recta numérica, tanto números racionales positivos como negativos. Dentro de las representaciones simbólicas se tiene el registro verbal *"sexta aparte"* y representación fraccional numérica. **Transformaciones**: El capítulo XV se titula *Transformaciones de fracciones,* en ella se desarrollan: Reducción de quebrados impropios a enteros o mixtos y viceversa. Reducción de entero a quebrado. Reducción de una fracción a su más simple expresión. Reducción de fracciones a denominador común. Fraccionamiento de la unidad. **Conversiones**: Verbal → Simbólico numérico Simbólico numérico → Verbal Pictórico →numérico Recta numérica → Simbólico numérico

Análisis fenomenológico	**Aspectos metodológicos**
Aplicaciones a la vida cotidiana: En el capítulo XIV de los números racionales, además de las referencias a la mitad, tercia, cuarta y sexta parte de una naranja, se ha descuidado situaciones problemáticas contextualizadas de la vida cotidiana.	**Objetivos e intenciones:** No se enuncia. **Orientaciones metodológicas:** En ninguna parte del texto se puede leer las intenciones ni objetivos de aprendizaje, pero sí se puede deducir que la intención del desarrollo del capítulo es introducir al estudiante en el estudio de los números racionales. **Problemas y ejercicios representativos:** Un rasgo característico del texto es proponer una batería de interrogantes como *"Comprobación del aprendizaje"* y una serie de ejercicios, estos últimos están en un cuaderno de trabajo. La batería de interrogantes tiene 15 cuestiones abiertas como por ejemplo: "*3. ¿Qué indica el denominador de una fracción? Ejemplo.* *4. ¿Qué indica el numerador de una fracción? Ejemplo.* *6. ¿Qué son los números racionales?".*
Elementos históricos: No registra referencias históricas.	**Errores de concepción:** Consideramos que algunas interrogante como la sexta *¿Qué son los números racionales?,* es una cuestión que los estudiantes tendrán mucha dificultad para responder. Por cuanto, en el texto, no se ha desarrollado los elementos conceptuales y significados del número racional de forma integral para que en base a ella se construya la conceptualización que se pide.

4.4.2.2 Período B : Orientación conductista en la Matemática Moderna

Los libros de texto editados entre los años 1974-1995 presentan el concepto de número racional de manera muy similar; todos se sustentan en la clase de equivalencia y, consecuentemente, los significados usados para introducir el concepto de número racional son esencialmente los de cociente y parte-todo.

En este segundo período, la enseñanza de los números racionales se aborda desde la necesidad de ampliar el conjunto de números enteros a partir de ejemplos, donde se muestra la imposibilidad de realizar divisiones, como se exhibe en el L.T. 1990. Esta tendencia es general en este período. De la limitante de Z y característica de número racional se desprende el significado de cociente indicado y se concluye definiendo la fracción como “un par ordenado (a, b) de números enteros en la forma $\frac{a}{b}$” con la restricción de que $b \neq 0$, en tanto, a diferencia del período anterior, en este período se concreta la definición de número racional como “el conjunto de todas las fracciones equivalentes entre sí y puede estar representado por cualquiera de sus elementos, generalmente el más simple” L.T. 1995, la construcción del conjunto de los números racionales se inicia con la definición de una relación de equivalencia R en $Z \times Z^*$, una clase de equivalencia de la relación. Finalmente, conceptúa Q como “El conjunto de todas las clases de equivalencia según $\Re$ se llama conjunto de los números racionales, al que se representa por Q, y cada clase de equivalencia es un número racional”. (p. 117).L.T. 1976-A.

En este período, el significado del cociente indicado es el núcleo de la conceptualización del número racional, sin embargo, se encontró que el significado parte-todo es una constante para introducir la noción de fracción, como queda evidenciado en las tablas adjuntas. Asimismo, se encontró como elementos complementarios otros significados, como operador y medida que son referidos de forma muy rápida, sin mayores usos, como recurso, para promover comprensión como queda evidenciado en los L.T. 1976-B y L.T. 1976-A.

Se encontró que en este período, los programas curriculares establecen el estudio del objeto matemático "Razones y proporciones", tratamiento que se da muy posteriormente al estudio de los números racionales, tal es el caso de los L.T. 1975, L.T. 1976-B, L.T. 1976-A, L.T. 1982 y L.T. 1990 que luego de estudiar polinomios y ecuaciones, desarrollan el tema razones proporciones y proporcionalidad. En estos textos se define la razón como: "Razón geométrica es la comparación de dos numerosa" L.T. 1975 "la razón de un número *a* a un número *b*, (donde b $\neq$ 0) es el número racional ($\frac{a}{b}$), definido por la fracción $\frac{a}{b}$" L.T. 1976-B y en forma similarmente el L.T. 1976-A. El libro de texto L.T. 1982 define: la "Razón de dos números es el cociente de dichos números" y el L.T. 1990 conceptúa la razón como la relación entre el "antecedente" y el "consecuente". De las observaciones anteriores se desprende que el estudio del significado de razón se fundamenta en la definición de fracción simplemente, mas no se ajusta al significado de comparación de cantidades de la misma o diferente magnitud, o como índice comparativo entre dos cantidades de magnitudes.

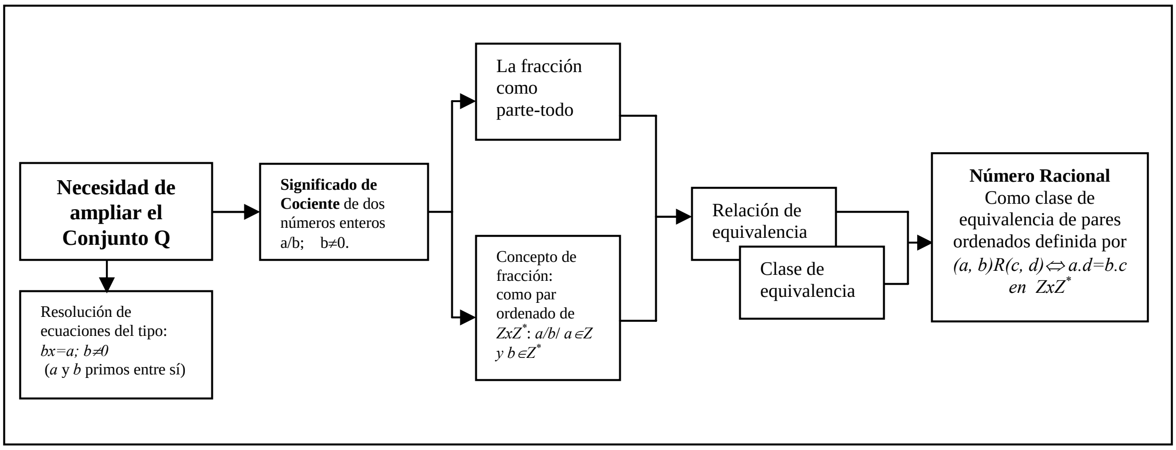
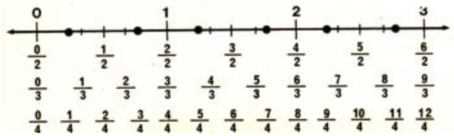
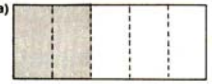
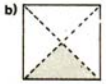
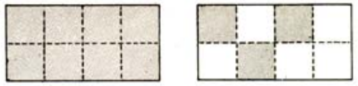
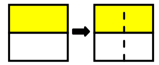


Figura 4.3 Ruta de construcción del concepto de número racional en el período B.

En los siguientes folios se presenta las observaciones organizadas de los contenidos y significados desarrollados en los libros de texto para la construcción del concepto de número racional correspondientes al período B.

Tabla 4.6

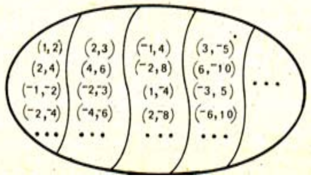
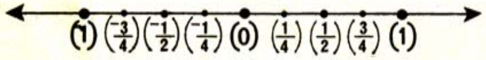
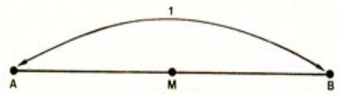
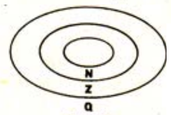
Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1974)

Significados y conceptos	Ilustraciones representativas	Análisis representacional
El autor aclara que en este grado se desarrolla solo el concepto de fracción; el de número racional, será desarrollado en el segundo grado. En un primer momento se discute la noción de regiones congruentes para abordar las fracciones en su significado parte-todo, como se muestra en la figura adjunta. Se introduce la idea de fracciones equivalentes, y se insinúa la clase de equivalencia cuando se presenta reiteradamente los conjuntos del tipo: $\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},\frac{8}{12},.......\right\}$. Como se muestra en la figura la fracción se define considerando el contexto de parto-todo, así lo revela los ejemplos de la figura. En la ultima parte del numeral 106 pág. 137, se concluye generalizando la notación de fracción: “En general, si a y b son dos números y b≠0, una fracción se denota por $\frac{a}{b}$.”	**106. FRACCION.—** En las figuras 153, 154 y 155, si asociamos el número de regiones sombreadas con el número total de regiones congruentes, podemos escribir: en forma de par ordenado: (1, 2), (2, 3) y (3, 5); en forma fraccionaria: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$.  Fig. 153 Fig. 154 Fig. 155 Cada una de estas formas de asociar dos números representa una fracción, donde 1, 2 y 3 indican el número de regiones sombreadas y 2, 3 y 4 el número total de regiones. **112. REPRESENTACION DE FRACCIONES EN LA RECTA NUMERICA.—** Si en la recta numérica para los números naturales (Fig. 161)  Fig. 161 cada intervalo unitario se divide en 2, 3, 4, etc., partes iguales, obtendremos puntos que corresponden a algunas fracciones, tal como nos ilustra la figura 162. Esta asociación de fracciones a puntos de una recta para los números naturales, constituye una representación de fracciones en la recta numérica.  **CONJUNTO DE EJERCICIOS 56** 1. En un establo hay 5 vacas y 3 toros. Escriba en forma de par ordenado y fraccionaria: a) El número de vacas y el número total de animales. b) El número de toros y el número total de animales. 2. Escriba en forma fraccionaria: a) 5 centavos c) 25 centavos b) 10 centavos d) 50 centavos. 3. ¿Qué fracción se debe asociar a la parte sombreada en cada una de las siguientes figuras unitarias: a)  b)  c) 	**Tipos**: - Simbólicas: numérica, algebraica y verbal. - Gráficas: Pictórica y en la recta numérica. **Transformaciones**: De (1,2) $\rightarrow \frac{1}{2}$ De $\frac{2}{3} \rightarrow \left\{\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},\frac{8}{12},.......\right\}$ $\rightarrow$ De ampliación: $\frac{2\times 2}{3\times 2}=\frac{2\times 3}{3\times 3}$..... $\rightarrow$de simplificación: $\frac{24\div 6}{30\div 6}=\frac{4}{3}$ (M.C.D. (24, 30) =6). Conversión de fracciones impropias en números mixtos, medio de la división de enteros: $\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$. Dentro de las pictóricas:  **Conversiones**: Numérica $\rightarrow$ pictórica y viceversa. Numérica $\rightarrow$ verbal. ($\frac{1}{2}$, se lee “un medio”) En la lectura de fracciones grandes se usa la expresión *avos* “siete cincuenta y cinco avos”. Recta numérica $\rightarrow$ numérica y viceversa.

Análisis fenomenológico	Aspectos metodológicos
Aplicaciones a la vida cotidiana: En la presentación del conceptos de fracción no se hace referencia a situaciones de la vida cotidiana o situaciones problemáticas que reflejen los significados del número racional. Sin embargo en la primera página se encontró el único ejemplo fenomenológico: “Un padre al morir dejó 17 caballos para que se repartan entre sus tres hijos: el mayor debe recibir la mitad, el segundo 1/3 y el menor 1/9. Como no pudieron repartirse, recurrieron a un anciano amigo, quien prometió ayudarlos. Este hábil hombre, se presentó con un caballo de su propiedad, lo reunió con los 17 y procedió a la repartición: el mayor se llevó 9 caballos (1/2), el segundo 6 caballos (1/3) y el tercero 2 caballos (1/9). El anciano tomó el suyo y se marchó	**Objetivos e intenciones:** En la introducción al capítulo se aclara que la intención del texto es simplemente del “Cálculo operativo con fracciones y decimales” y se posterga para el próximo grado el estudio de los números racionales. **Orientaciones metodológicas:** Orientaciones explícitas no presenta. **Problemas y ejercicios representativos:** En la proposición de ejercicios se encontró que los dos primeros problemas hacen referencias a situaciones de la vida real, veámoslo: “En un establo hay 5 vacas y tres toros. Escriba en forma de par ordenado y fraccionaria: a)El número de vacas y el número total de animales; b) El número de toros y el número total de animales.” Este ejercicio transmite el significado parte-todo. El segundo pide escribir en forma fraccionaria: 5, 10, 25 y 50 centavos.
Elementos históricos: Como presentación al Capítulo V de Fracciones y Decimales, se presenta una reseña histórica de Diofanto; el epitafio en su tumba, que propone una ecuación de primer grado con coeficientes racionales. Más allá de la situación anecdótica, los elementos históricos no se utilizan en el desarrollo de conceptos.	**Errores de concepción:** Los demás ejercicios tiene el objetivo de reforzar, por repetición conceptos como: parte-todo, convertir fracciones impropias en números mixtos, simplificar fracciones. No se proponen situaciones problemáticas nuevas que activen proceso de razonamiento, y superen la esfera de los ejercicios de repetición que refuerzan procesos miméticos. En la generalización de la fracción *a/b* se olvida aclarar que *a* y *b* son dos números enteros. (Pág. 137)

Tabla 4.7

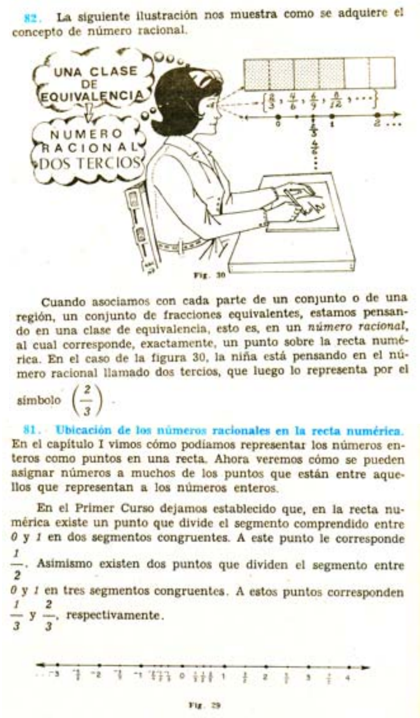
Referencias Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 2º Grado, (Código: L.T.1975)

Significados y conceptos	**Ilustraciones representativas**	**Análisis representacional**
EL significado de cociente indicado: La necesidad de extender el conjunto de los números enteros, se argumenta con ejemplos como "*Así, son muchos los problemas cotidianos tales como: dividir 3 metros de tela en 5 partes iguales, repartir 5 kilogramos de azúcar entre 2 personas, etc. Que no tienen solución en el conjunto de Z; de allí, la necesidad de ampliar el conjunto e los números enteros con la introducción de un conjunto de números denominados* ***conjunto de los números racionales"***. Pág. 61. Se observa que entre el 0 y 1 no existe un número en los enteros que se asocie a los puntos que existen allí, esto conduce a la postulación de las fracciones. Véase la figura 18. Pág. 60. (división del segmento) En la primera figura se observa la definición de "*Número racional es una clase de equivalencia de pares ordenados definida por (a, b) $\Re$ (c, d) $\Leftrightarrow$ a.d = b.c en ZxZ*."* Pág. 62. Es decir, "*El conjunto formado por todas las clases de equivalencia de ZxZ* se llama conjunto de los números racionales o conjunto Q".* La razón geométrica se ha definido como "...la comparación de dos números" (Pág. 165).	**37. EL CONJUNTO Q DE LOS NUMEROS RACIONALES: CONCEPTO DE NUMERO RACIONAL.—** Sea $Z = \{\ldots, ^-3, ^-2, ^-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ y $Z \times Z^* = \{\ldots, (1, 2), (2, 3), (^-1, 4), (3, ^-5), (2, 4), (^-2, 3)$ $(^-4, 6), (^-3, 5), \ldots\}$. En el conjunto de pares ordenados de $Z \times Z^*$ podemos establecer una relación R, de modo que: $(a, b)\ R\ (c, d) \Longleftrightarrow a . d = b . c.$ Así, por ejemplo: $(1, 2)\ R\ (2, 4)$ porque $1 \times 4 = 2 \times 2$, $(^-2, 3)\ R\ (^-4, 8)$ porque $^-2 \times 6 = 3 \times ^-4$ y $(3, ^-5)\ R\ (^-3, 5)$ porque $3 \times 5 = ^-5 \times ^-3$. Esta relación R definida en $Z \times Z^*$ es de equivalencia porque es: a) **Reflexiva:** $(a, b)\ R\ (a, b)$. b) **Simétrica:** Si $(a, b)\ R\ (c, d) \Longrightarrow (c, d)\ R\ (a, b)$. c) **Transitiva:** Si $(a, b)\ R\ (c, d)$ y $(c, d)\ R\ (m, n) \Longrightarrow (a, b)\ R\ (m, n)$. Puesto que R es una relación de equivalencia, podemos establecer una partición de $Z \times Z^*$ en clases de equivalencia, tal como nos lo ilustra la figura 19.  **40. RECTA NUMERICA PARA LOS NUMEROS RACIONALES.—** Dado $Q = \left\{\ldots, (^-1), \left(\frac{^-3}{4}\right), \left(\frac{^-1}{2}\right), \left(\frac{^-1}{4}\right), (0), \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}\right), (1), \ldots\right\}$ y una recta L, se puede establecer una función $f : Q \rightarrow L$, donde a cada número racional le corresponde un punto y sólo uno en la recta (Fig. 21). Así, se obtiene la recta numérica para los números racionales.  Fig. 21 $2 \div 5 = n$, de donde: $2 = 5 \times n$, lo cual es imposible, porque no existe un número entero n que multiplicado por 5 dé 2. Análogamente, si AB = 1 y M es punto medio de $\overline{AB}$ (Fig. 18), en el conjunto Z no existe un número que exprese la medida de $\overline{AM}$.  Por consiguiente, admitimos que $Z \subset Q$; y como $N \subset Z$, se tiene: $N \subset Z \subset Q$ Esta inclusión nos la ilustra la figura 20.  Fig. 20	**Tipos**: En este texto se ha evitado el uso de las representaciones pictóricas, se ha enfatizado el uso de representaciones simbólicas numéricas y alfabéticas, por ejemplo, para enunciar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la clase de equivalencia. Otras representaciones: - Conjuntista en forma extensiva. - Representaciones gráfica: la recta numérica, división de un segmento, además el diagrama de Venn que ilustra la de *clase de equivalencia*. - Lo que el autor llama representación literal de la fracción (a/b). **Transformaciones**: De par ordenado a notación fraccional. De representante canónico a clase de equivalencia. Manipulación de signos (+ y -) en el numerador y denominador. Simplificación y ampliación de fracciones. **Conversiones**: Simbólica numérica → diagramas de Veen. Simbólica numérica → gráfica en la recta numérica. (viceversa)

Análisis fenomenológico	**Aspectos metodológicos**
Aplicaciones a la vida cotidiana: En todo el capítulo I de los números racionales, la única ocasión que se refiere a hechos de la vida cotidiana en cuando ejemplifican la imposibilidad de hacer ciertas reparticiones: "*dividir 3 metros de tela en 5 partes iguales, repartir 5 kilogramos de azúcar entre 2 personas, etc.*". En todo la exposición del contenido no se ha podido encontrar otras referencias a situaciones de la vida cotidiana. Más aun, el autor, se esfuerza por evitarlos.	**Objetivos e intenciones:** Enfatizar en los conceptos básicos y fundamentales. Unificación de los conceptos en los distintos conjuntos de números, recurriendo a ejemplos y a razonamientos lógicos como único camino para alcanzar el aprendizaje. Preparar al estudiante para afrontar los problemas cotidianos y comprender mejor los avances científicos.
	Orientaciones metodológicas: En términos del autor es necesarios desterrar mecanismos e imposición verbalista, introducir ejercicios graduados con instrucciones concisas para lograr soluciones ordenadas. Además apela a la exposición sencilla en el uso adecuado del lenguaje y simbolismo matemático. Considera que los ejercicios, reseñas históricas, paradojas y pensamientos celebres son complementos de cultura matemática. En recomendaciones a los estudiantes, el autor, enfatiza la necesidad de "practicar" con lápiz y papel muchos problemas lo que llama "Aprender haciendo" y superar la simple lectura del texto como si se tratara de una novela.
Elementos históricos: Al inicio del capítulo presenta una reseña biográfica de Leonar Euler, sin ninguna relación con el tema de estudio, es decir los números racionales.	**Problemas y ejercicios representativos:** - Ejercicios de escritura de fracciones equivalentes. - Ejercicios que refuerzan la noción de pertenencia de una fracción a una clase de equivalencia. - Ejercicios de conversión de representación gráfica en la recta numérica a simbólica numérica y viceversa. - Ejercicios de simplificación de fracciones.
	Errores de concepción: No se observó.

Tabla 4.8

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1976-A)

Significados y conceptos	**Ilustraciones representativas**	**Análisis representacional**
Sustentada la necesidad de extender el conjunto de los números enteros ($ax=b$, $y\ a\neq 0$), se define la noción de fracción como:: “*... cualquier par ordenado (a, b) de números enteros cuya segunda componente no es cero”.* El proceso de construcción del conjunto de los números racionales se inicia con la definición de una relación de equivalencia $\Re$ en ZxZ^{*}, clase de equivalencia de la relación y se conceptúa ***Q*** en estos términos: *“El conjunto de todas las clases de equivalencia según $\Re$ se llama conjunto de los números racionales, al que se representa por Q, y cada clase de equivalencia es un número racional*”. Pág. 117. En el texto, cuando se tiene que introducir el significado (los significados) del número racional se recurre a la fracción como cociente, los demás significados están ausentes, pero más adelante en la Pág. 165 al estudiarse la multiplicación de fracciones, dentro de los ejercicios propuestos (15) se encontró un ejercicio que para su solución es necesario el significado de operador, veámoslo: 15. Un automóvil sale de Lima a las 8 de la mañana con dirección de Guacho. Si la distancia entre las dos ciudades es de 130 Km y el automóvil es una primera etapa, ha recorrido los 4/5 de la distancia total, ¿qué distancia le queda por recorrer?. En el texto, luego de seis capítulos más adelante, se desarrolla la noción de proporcionalidad en ***Q***, y para ello, previamente se revisa el significado de razón: *“La razón de un número* **a**, *a un número* **b** *diferente de cero , es el número racional* $\left(\frac{a}{b}\right)$ *definido por la fracción* $\frac{a}{b}$ *”.*	 82. La siguiente ilustración nos muestra como se adquiere el concepto de número racional. Fig. 30 Cuando asociamos con cada parte de un conjunto o de una región, un conjunto de fracciones equivalentes, estamos pensando en una clase de equivalencia, esto es, en un *número racional*, al cual corresponde, exactamente, un punto sobre la recta numérica. En el caso de la figura 30, la niña está pensando en el número racional llamado dos tercios, que luego lo representa por el símbolo $\left(\frac{2}{3}\right)$. 81. Ubicación de los números racionales en la recta numérica. En el capítulo I vimos cómo podíamos representar los números enteros como puntos en una recta. Ahora veremos cómo se pueden asignar números a muchos de los puntos que están entre aquellos que representan a los números enteros. En el Primer Curso dejamos establecido que, en la recta numérica existe un punto que divide el segmento comprendido entre *0* y *1* en dos segmentos congruentes. A este punto le corresponde $\frac{1}{2}$. Asimismo existen dos puntos que dividen el segmento entre *0* y *1* en tres segmentos congruentes. A estos puntos corresponden $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, respectivamente. Fig. 29  170. Razones Ejemplo 1. Supongamos que en una clase de Matemática hay *12* niños y *6* niñas. *Un modo de comparar* el número de niños con el número de niñas de esta clase es como sigue: **Razón: 6 a 3.** Razón: 4 a 2.	**Tipos**: A través de la ilustración, el autor muestra cómo se concibe la formación del concepto de número racional. La recta numérica transmite la idea de: una clase de equivalencia representa un punto en la recta y a su vez un número racional. Usa la representación verbal ‘*dos tercios’*, simbólica, gráfica pictórica y la recta numérica. También utiliza la representación simbólica algebraica. **Transformaciones**: De pictórica a pictórica (figura de 3/2 a 4/6) De simbólica a simbólica. **Conversiones**: Las conversiones detectadas son: Pictórica → Simbólica numérica. Verbal → Simbólica numérica. Verbal → Simbólica numérica, pictórica, recta. Recta numérica→ Simbólica numérica. Viceversa. Simbólica algebraica → simbólica numérica.

Análisis fenomenológico	**Aspectos metodológicos**
Aplicaciones a la vida cotidiana: Si bien, el autor explica en el prólogo que en base a ejemplos extraídos del mundo habitual se construye el conjunto de los números racionales, esta intención no se concretiza en el texto. Los ejemplos y ejercicios son decididamente descontextualizados, donde prima los enunciados verbales y las representaciones simbólicas numérica y algebraica.	**Objetivos e intenciones:** No se enuncia. **Orientaciones metodológicas:** Según el autor, se debe partir de ejemplos extraídos del mundo habitual de los alumnos, introducir los conceptos de forma directa y sencilla y para incentivar el esfuerzo del estudiante, proponer abundante material de trabajo, además para que el estudiante pueda entender la matemática moderna debe usarse un lenguaje más apropiado para el nivel del alumno. (Prólogo)
Elementos históricos: No registra referencias históricas.	**Problemas y ejercicios representativos:** Según el autor, en el prólogo se menciona que, los ejercicios parten, en lo posible, de situaciones concretas vinculadas con los intereses de los alumnos. Pág. 6, sin embargo, los ejercicios propuestos son simplemente de repaso de los temas ya desarrollados en la unidad correspondiente. Dentro de los ejercicios del Grupo 26 se proponen cuestiones abiertas, como por ejemplo, *¿Cuándo se dice que una relación definida en un conjunto es de equivalencia?* Estas interrogantes tienen el propósito de consolidar el aprendizaje de las definiciones y propiedades que sirvieron para definir el conjunto de los números racionales. También se formula proposiciones que deben determinarse su validez (V o F) , por ejemplo, - *“Toda fracción es un número racional.* - *Dos fracciones iguales son equivalentes*.” El ejercicio 9 y 10 propone realizar conversiones de la representación gráfica en la recta numérica a su representación fraccional y viceversa. **Errores de concepción:** Existe una incongruencia entre las intenciones metodológicas expresadas en el prólogo con el desarrollo mismo de los contenidos, que no se vinculan con experiencias concretas e intereses de los estudiantes.

Tabla 4.9

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1976-B)

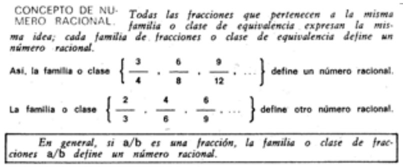
Significados y conceptos

En la exposición de las limitaciones del conjunto Z se percibe que el autor considera tres significados: El número racional como cociente, como medida y como parte-todo. (ver figura adjunta)

"EN RESUMEN; El conjunto de los números racionales es una extensión necesaria del conjunto de los números enteros, porque:

- *permite obtener la clausura en la división de dos enteros a, b, con la única restricción de que b sea diferente de cero.*
- *Por consiguiente, hace posible hallar el conjunto solución de ecuaciones de la forma ax=b, con a≠0.*
- *Facilita la expresión de mediciones".* Pág. 69

La ilustración de abajo muestra el uso de la clase de equivalencia para desarrollar el concepto del número racional construido sobre el significado de cociente.



CONCEPTO DE NUMERO RACIONAL. *Todas las fracciones que pertenecen a la misma familia o clase de equivalencia expresan la misma idea; cada familia de fracciones o clase de equivalencia define un número racional.*

Así, la familia o clase $\left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \ldots\right\}$ define un número racional.

La familia o clase $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots\right\}$ define otro número racional.

En general, si a/b es una fracción, la familia o clase de fracciones a/b define un número racional.

La definición de fracción que propone es:

"Se llama fracción a todo par ordenado (a, b) ∈zxz, donde a se llama numerador y b se llama denominador". Pág. 70*

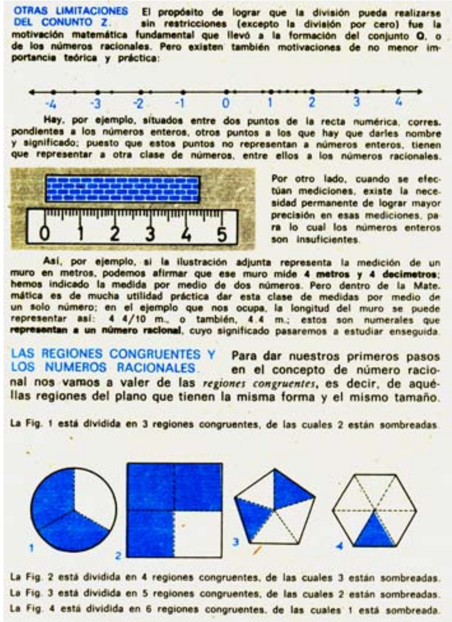
Luego de cuatro capítulos se estudia la *Proporción* dentro de cuyos contenidos se desarrolla el significado de *"La razón como número racional"* desarrollado a través del ejemplo:

"...a determinado subgrupo de niños le corresponde un determinado subgrupo de revistas: A cada 12 niños le corresponde 36 revistas. *A cada 6 niños le corresponde 24 revistas.... A cada 1 niño le corresponde 3 revistas"*Pág. 165.

A esta comparación de dos números por medio de la división, expresada como fracción, el autor lo denomina razón geométrica.

"La razón de un número a *a un número* b *(donde b≠0) es el número racional (a/b), definido por la fracción* $\frac{a}{b}$.

Ilustraciones representativas



OTRAS LIMITACIONES DEL CONUNTO Z. El propósito de lograr que la división pueda realizarse sin restricciones (excepto la división por cero) fue la motivación matemática fundamental que llevó a la formación del conjunto Q, o de los números racionales. Pero existen también motivaciones de no menor importancia teórica y práctica:

Hay, por ejemplo, situados entre dos puntos de la recta numérica, correspondientes a los números enteros, otros puntos a los que hay que darles nombre y significado; puesto que estos puntos no representan a números enteros, tienen que representar a otra clase de números, entre ellos a los números racionales.

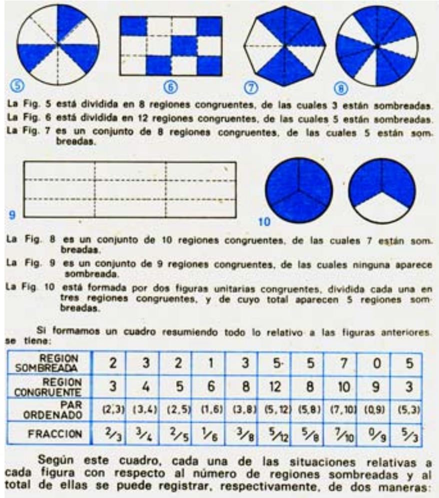
Por otro lado, cuando se efectúan mediciones, existe la necesidad permanente de lograr mayor precisión en esas mediciones, para lo cual los números enteros son insuficientes.

Así, por ejemplo, si la ilustración adjunta representa la medición de un muro en metros, podemos afirmar que ese muro mide **4 metros y 4 decimetros**; hemos indicado la medida por medio de dos números. Pero dentro de la Matemática es de mucha utilidad práctica dar esta clase de medidas por medio de un solo número; en el ejemplo que nos ocupa, la longitud del muro se puede representar así: 4 4/10 m., o también, 4.4 m.; estos son numerales que **representan a un número racional**, cuyo significado pasaremos a estudiar enseguida.

LAS REGIONES CONGRUENTES Y LOS NUMEROS RACIONALES. Para dar nuestros primeros pasos en el concepto de número racional nos vamos a valer de las *regiones congruentes*, es decir, de aquéllas regiones del plano que tienen la misma forma y el mismo tamaño.

La Fig. 1 está dividida en 3 regiones congruentes, de las cuales 2 están sombreadas.

La Fig. 2 está dividida en 4 regiones congruentes, de las cuales 3 están sombreadas.
La Fig. 3 está dividida en 5 regiones congruentes, de las cuales 2 están sombreadas.
La Fig. 4 está dividida en 6 regiones congruentes, de las cuales 1 está sombreada.



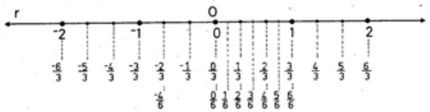
La Fig. 5 está dividida en 8 regiones congruentes, de las cuales 3 están sombreadas.
La Fig. 6 está dividida en 12 regiones congruentes, de las cuales 5 están sombreadas.
La Fig. 7 es un conjunto de 8 regiones congruentes, de las cuales 5 están sombreadas.

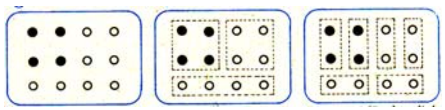
La Fig. 8 es un conjunto de 10 regiones congruentes, de las cuales 7 están sombreadas.
La Fig. 9 es un conjunto de 9 regiones congruentes, de las cuales ninguna aparece sombreada.
La Fig. 10 está formada por dos figuras unitarias congruentes, dividida cada una en tres regiones congruentes, y de cuyo total aparecen 5 regiones sombreadas.

Si formamos un cuadro resumiendo todo lo relativo a las figuras anteriores, se tiene:

REGION SOMBREADA	2	3	2	1	3	5	5	7	0	5
REGION CONGRUENTE	3	4	5	6	8	12	8	10	9	3
PAR ORDENADO	(2,3)	(3,4)	(2,5)	(1,6)	(3,8)	(5,12)	(5,8)	(7,10)	(0,9)	(5,3)
FRACCION	2/3	3/4	2/5	1/6	3/8	5/12	5/8	7/10	0/9	5/3

Según este cuadro, cada una de las situaciones relativas a cada figura con respecto al número de regiones sombreadas y al total de ellas se puede registrar, respectivamente, de dos maneras:



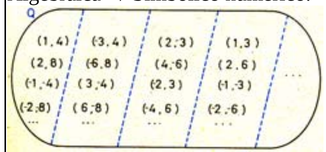


Análisis representacional

Tipos:
En esta edición se encontraron las representaciones: simbólica (numérica y alfabética) pictórica, tabulares, gráfica en la recta numérica y el diagrama de Venn.
Se ha evitado en todo momento el uso de representación verbal de una fracción.

Transformaciones:
De par ordenado a fraccional y viceversa.
De resolución de ecuaciones del tipo: 4x=3
De partición de polígonos en partes congruentes.
De segmentación de la recta numérica.
De fracciones equivalentes a producto cruzado.
En base a la fracción representante o canónica a la clase de equivalencia..
Reducción de fracciones.
De número entero a fracción.

Conversiones:
Gráfico pictórico. → Simbólico numérico
Gráfico pictórico. → Tabular
Recta numérica → Simbólica numérica
Pictórico (continuas y discretas) → Simbólico numérico
Algebraica → Simbólico numérico.



Clase $(1,4)=\frac{1}{4}=\left\{\ldots\frac{1}{4},\frac{2}{8},\frac{-1}{-4},\frac{-2}{-8}\ldots\right\}$

Análisis fenomenológico

Aplicaciones a la vida cotidiana:
En la exposición del concepto de número racional no se utilizan situaciones de la vida real.
En la exposición de *Razones y Proporciones* se estudia la idea de escala, por ejemplo, escala en los mapas, y otros ejemplos de aplicación a la cinemática.

Elementos históricos: En diferentes lugares del texto se encuentran alusiones históricas de personajes matemáticos como Evaristo Galois, Rene Descartes o Leibniz. Estas reseñas históricas no están relacionados a los contenidos que se desarrollan, más bien, están dedicadas a ilustrar datos biográficos de matemáticos célebres.

Aspectos metodológicos

Objetivos e intenciones: No se enuncia.

Orientaciones metodológicas:
El desarrollo del concepto de fracción y número racional tiene una secuencia que corresponde a un estilo propio de la matemática moderna; trata de construir el concepto de número racional en base a un conjunto de definiciones, propiedades (reflexiva, simétrica y transitiva de la equivalencia de fracciones) clase de equivalencia, partición de una clase de equivalencia y finalmente se define la fracción, como se puede ver en la figura adjunta.

Problemas y ejercicios representativos:
En el grupo de *Ejercicios Nº 21*, además de cuestiones abiertas, *"¿Las operaciones que están definidas en Q, están necesariamente definidas también en Z? ¿Por qué? Dé ejemplos",* también, se proponen ejercicios de conversión de representación pictórica, recta numérica a simbólica.
En grupo de tareas pide determinar la verdad o falsedad de proposiciones sobre inclusión y no inclusión de conjuntos numéricos N, Z, y Q.

Errores de concepción: Es materia de análisis el ejercicio 10 de la ilustración, porque crea confusión en la interpretación de la representación pictórica que se asocia al número mixto.

Tabla 4.10

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 2º Grado, (Código: L.T.1982)

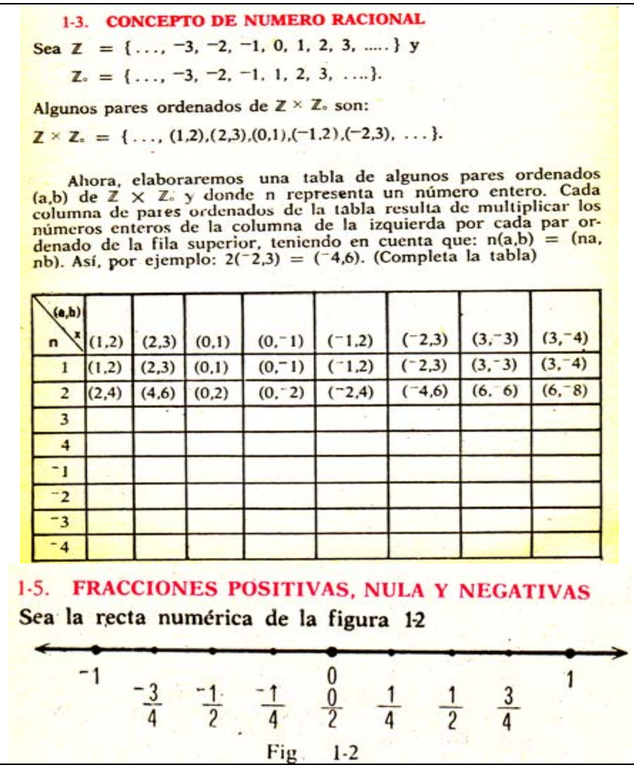
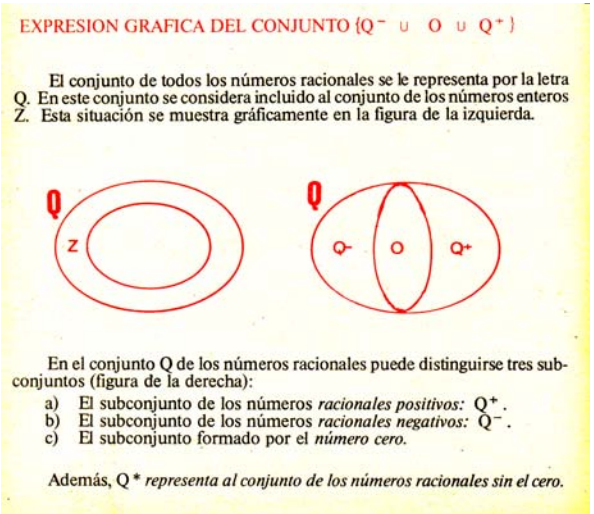
<table>
<tr><th>Significados y conceptos</th><th>Ilustraciones representativas</th><th colspan="2">Análisis representacional</th></tr>
<tr>
<td rowspan="3">El autor utiliza el significado de fracción como cociente, a partir de la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros. El número racional es construido como un conjunto de clases de equivalencia.
La tabla de la figura muestra en la primera fila pares ordenados *(a, b)* que pertenecen a ZxZ_o, cada columna representa una clase de equivalencia. Para explicar esto el autor realiza multiplicaciones sucesivas del primer par por un número entero cualquiera, excepto cero.
Se afirma que *"cada conjunto de pares ordenados expresa un número racional y se denota así;* $\frac{2}{3}=\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},\frac{8}{12},\frac{10}{15},...\right\}$ *"*.Pág. 18.
"Luego, podemos decir, un número racional es la representación de todos los pares ordenados de ZxZ_o que cumple la relación
(A, B) R (C, D) ⇔ A.D=B.C". PÁG. 19.
Luego, seis unidades más adelante se presenta la noción de *"Razones y Proporciones"* . En la Pág. 224 se define: *"Razón de dos números es el cociente de dichos números"* y propone un ejemplo como éste:
"Supongamos que en una reunión familiar hay 12 personas de las cuales 8 son damas. ¿Cuál es la razón entre el número de damas y el número de personas? Es 8/12.
¿Cuál es la razón entre el número de caballeros y el números de personas? Es 4/12,
¿Cuál es la razón entre el número de caballeros y el de damas? 4/8"
En este texto se ha podido detectar claramente hasta dos significados del número racional, la fracción como cociente y como razón.</td>
<td rowspan="3">
1-3. CONCEPTO DE NUMERO RACIONAL
Sea Z = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...} y
$Z_\circ$ = {..., −3, −2, −1, 1, 2, 3, ...}.
Algunos pares ordenados de Z × $Z_\circ$ son:
Z × $Z_\circ$ = {..., (1,2),(2,3),(0,1),($^-$1,2),($^-$2,3), ...}.
Ahora, elaboraremos una tabla de algunos pares ordenados (a,b) de Z × $Z_\circ$ y donde n representa un número entero. Cada columna de pares ordenados de la tabla resulta de multiplicar los números enteros de la columna de la izquierda por cada par ordenado de la fila superior, teniendo en cuenta que: n(a,b) = (na, nb). Así, por ejemplo: 2($^-$2,3) = ($^-$4,6). (Completa la tabla)
<table>
<tr><th>(a,b) / n x</th><th>(1,2)</th><th>(2,3)</th><th>(0,1)</th><th>(0,$^-$1)</th><th>($^-$1,2)</th><th>($^-$2,3)</th><th>(3,$^-$3)</th><th>(3,$^-$4)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>(1,2)</td><td>(2,3)</td><td>(0,1)</td><td>(0,$^-$1)</td><td>($^-$1,2)</td><td>($^-$2,3)</td><td>(3,$^-$3)</td><td>(3,$^-$4)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>(2,4)</td><td>(4,6)</td><td>(0,2)</td><td>(0,$^-$2)</td><td>($^-$2,4)</td><td>($^-$4,6)</td><td>(6,$^-$6)</td><td>(6,$^-$8)</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$^-$1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$^-$2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$^-$3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$^-$4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
1-5. FRACCIONES POSITIVAS, NULA Y NEGATIVAS
Sea la recta numérica de la figura 1-2

Fig 1-2</td>
<td colspan="2">**Tipos**:
La representación más usada es la simbólica numérica y algebraica. Evita utilizar las representaciones verbal e icónica. Además de la tabla, que es una herramienta representativa para explicar las clases de equivalencia, se utiliza la recta numérica para representar el conjunto de los números racionales.
Es interesante ver que también usa la representación conjuntista para expresar la conformación de los racionales.*"El conjunto de números racionales está formado por los racionales positivos, cero y racionales negativos.*
De modo que $Q=Q^{-}\cup\{0\}\cup Q^{+}$
Además, $Q_0=Q-\{0\}$ *"*. Pág. 19</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">**Transformaciones**:
De la fracción como par ordenado *(a, b)* a su forma de *a/b*.
Multiplicación del numerador con el denominador para ver si es positiva o negativa la fracción.</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Conversiones**:
Representación en la recta numérica →Simbólica numérica (fracción)
De representación fraccional a su representación decimal a través de la división del numerador entre el denominador.</td></tr>
<tr><th>Análisis fenomenológico</th><th colspan="3">Aspectos metodológicos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">**Aplicaciones a la vida cotidiana:**
Un factor resaltante es la presentación de los contenidos totalmente descontextualizados, el autor se esfuerza excesivamente en el uso de un lenguaje y simbolismo formal.</td><td colspan="3">**Objetivos e intenciones:**
No registra explícitamente.</td></tr>
<tr><td colspan="3">**Orientaciones metodológicas:**
En el prólogo el autor describe la características de la presentación *"la explicación de los temas con claridad y sencillez, el uso adecuado del lenguaje y simbolismo matemático"*y la *"discusión"* de ejercicios, para promover la *comprensión cabal* de los conceptos y la asignación de tareas de *"aplicación"* como indispensables en el estudio de la matemática. Pág. 5 (Prólogo)
El objetivo de la unidad es: Reconocer el conjunto de los números como una extensión del conjunto de los números enteros.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">**Elementos históricos:**
El autor presenta la biografía de Evaristo Galois (1811-1832), en el que resalta su contribución a la matemática moderna y la teoría de grupos. El hecho histórico relacionado a las fracciones que se pudo encontrar es que Galois a los 17 años de edad publicó su primer trabajo sobre "fracciones continuas", aunque no se explica en qué consisten.</td><td colspan="3">**Problemas y ejercicios representativos:**
Al final de cada unidad se propone "*ejercicios de repaso"* y una *"prueba de comprobación"*, el objetivo de estas actividades es que el estudiante auto evalúe su aprendizaje.</td></tr>
<tr><td colspan="3">**Errores de concepción:**
En la tabla de la figura se percibe que en la primera columna hay una ligera falta reiterativa, es suficiente que *n* pertenezca a $\{1,2,3,4,.......\}$.
Para la definición del número racional es necesario el concepto de equivalencia de fracciones y clase de equivalencia y esta definición se enuncia en la Pág. 19, pero recién en la Pág. 34, se explica la noción de fracciones equivalentes. Se considera esto un error en la secuencia de la exposición de los conceptos.</td></tr>
</table>

Tabla 4.11

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1990)

Significados y conceptos	Ilustraciones representativas	Análisis representacional
La exposición introductoria del número racional es muy breve, se funda en la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros. Se encontró que a pesar de abordar la construcción de los números racionales toma los elementos necesarios pero no se logra concretizar este trabajo en una definición. Mucho menos se explica los significados de los racionales. De la necesidad de extender el conjunto de los números enteros ante la imposibilidad de resolver la ecuación: 6 x = 5, se enuncia la definición de fracción: *"Se llama fracción a todo par ordenado (a, b) de números enteros, escrito en la forma* $\frac{a}{b}$*, y en el cual es b≠0."* La definición de **Razón** que este libro de texto utiliza es: *"Razón geométrica es el resultado de comparar dos números por medio de la división."*(Pág. 193)	 EXPRESION GRAFICA DEL CONJUNTO {$Q^- \cup O \cup Q^+$} El conjunto de todos los números racionales se le representa por la letra Q. En este conjunto se considera incluido al conjunto de los números enteros Z. Esta situación se muestra gráficamente en la figura de la izquierda. En el conjunto Q de los números racionales puede distinguirse tres sub-conjuntos (figura de la derecha): a) El subconjunto de los números *racionales positivos:* Q^+. b) El subconjunto de los números *racionales negativos:* Q^-. c) El subconjunto formado por el *número cero.* Además, Q* *representa al conjunto de los números racionales sin el cero.*	**Tipos**: Simbólica: numérica algebraica y verbal. Gráfica en la recta numérica. Los diagramas de Veen ilustran diferentes representaciones del número racional: - Diagrama de Veen: la unión de racionales positivos, cero y negativos. - Diagrama de Venn: Q que incluye a Z. **Transformaciones**: Como par ordenado (5,7) o 5/7. Fracciones equivalentes por multiplicación de un número entero con ambos términos de la fracción. **Conversiones**: Simbólica numérica → Recta numérica. Simbólica numérica → verbal: "5/7 que se lee "cinco séptimos"

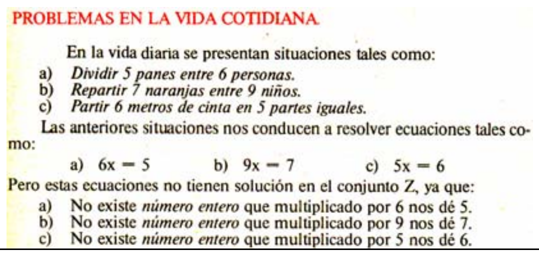
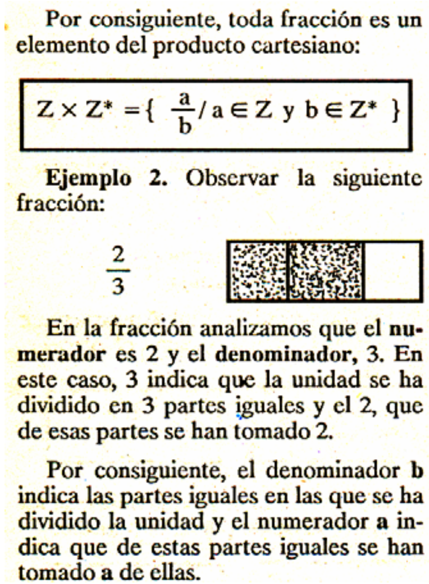
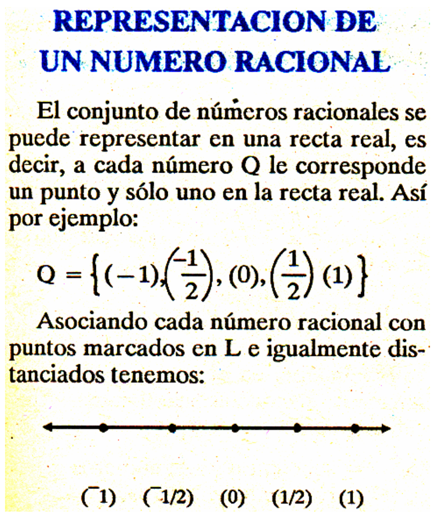
Análisis fenomenológico	Aspectos metodológicos
Aplicaciones a la vida cotidiana: Con el subtítulo de "Problemas en la vida cotidiana" (Pág. 162), se propone ejemplos de situaciones que revelan el significado de fracción como cociente: *"a) Dividir 5 panes entre 6 personas.* *b)Repartir 7 naranjas entre 9 niños.* *c) Partir 6 metros de cinta en 5 partes iguales"* Estas situaciones de la vida real, conducen al autor a proponer la necesidad de ampliar el conjunto de los número enteros por la imposibilidad de resolver ecuaciones del tipo 9 x = 7 .  PROBLEMAS EN LA VIDA COTIDIANA En la vida diaria se presentan situaciones tales como: a) *Dividir 5 panes entre 6 personas.* b) *Repartir 7 naranjas entre 9 niños.* c) *Partir 6 metros de cinta en 5 partes iguales.* Las anteriores situaciones nos conducen a resolver ecuaciones tales como: a) 6x = 5 b) 9x = 7 c) 5x = 6 Pero estas ecuaciones no tienen solución en el conjunto Z, ya que: a) No existe *número entero* que multiplicado por 6 nos dé 5. b) No existe *número entero* que multiplicado por 9 nos dé 7. c) No existe *número entero* que multiplicado por 5 nos dé 6.	**Objetivos e intenciones:** No registra información explicita para determinar los fines y objetivos. **Orientaciones metodológicas:** En la exposición de los contenidos el libro de texto "La nueva estructura de la matemática 1" desarrolla ordenadamente todos los temas contenidos en los programas curriculares, tanto vigente como experimental. El autor tiene preocupación por satisfacer los requerimientos de profesores que adopta uno de los dos programas que en ese momento se tenía en el sistema educativo. **Problemas y ejercicios representativos:** Al final del capítulo se propone una batería de cuestiones abiertas como *¿Es un número entero un número racional?, ¿En qué conjunto está contenido el conjunto de los naturales?, ¿El número 0/8 es un entero?, ¿Es lo mismo fracción que número racional?, ¿Existen racionales que no son números enteros?.* Cada una de estas interrogantes está dirigidas a establecer relaciones en la figura representativa que presentamos arriba.
Elementos históricos: No registra elementos históricos, en la exposición del texto.	**Errores de concepción:** Más que un error de concepción es un vacío la ausencia de una conceptualización del número racional.

Tabla 4.12

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1991)

Significados y conceptos	Ilustraciones representativas	Análisis representacional
La idea de fracción que introduce el texto es *"Número fraccionario es cualquier par ordenado (a, b) de números enteros, escrito de la forma $\frac{a}{b}$, con b≠0"*. Considera que la fracción es un elemento del producto cartesiano Z×Z*. La figura adjunta se observa que además se el concepto de fracción se sustenta en el contexto parte-todo. La definición del conjunto de los números racionales: "*El conjunto formado por todos lo números racionales se llama conjunto de números racionales, al que se le representa por Q, o sea:* $Q = \left\{\frac{a}{b}\right\} / a \in Z \quad y \quad b \in Z*$ *Donde $\frac{a}{b}$ es un número racional.*"	 Por consiguiente, toda fracción es un elemento del producto cartesiano: $Z \times Z^* = \{ \frac{a}{b} / a \in Z \text{ y } b \in Z^* \}$ **Ejemplo 2.** Observar la siguiente fracción: $\frac{2}{3}$ En la fracción analizamos que el **numerador** es 2 y el **denominador**, 3. En este caso, 3 indica que la unidad se ha dividido en 3 partes iguales y el 2, que de esas partes se han tomado 2. Por consiguiente, el denominador **b** indica las partes iguales en las que se ha dividido la unidad y el numerador **a** indica que de estas partes iguales se han tomado a de ellas.  **REPRESENTACION DE UN NUMERO RACIONAL** El conjunto de números racionales se puede representar en una recta real, es decir, a cada número Q le corresponde un punto y sólo uno en la recta real. Así por ejemplo: $Q = \{(-1), (\frac{-1}{2}), (0), (\frac{1}{2}) (1)\}$ Asociando cada número racional con puntos marcados en L e igualmente distanciados tenemos: 	**Tipos**: Simbólica numérica. Simbólica algebraica. Simbólica verbal. Pictórica. Recta numérica. **Transformaciones**: Obtención de fracciones equivalentes. Regla del aspa. Reducción de fracciones equivalentes. Manipulación de signos del numerador y denominador. Ampliación y reducción de fracciones. **Conversiones**: Simbólica numérica → verbal. Simbólico numérico → Gráfico pictórico Recta numérica → simbólica numérica. Simbólica algebraica → simbólica numérica.

Análisis fenomenológico	Aspectos metodológicos
Aplicaciones a la vida cotidiana: Luego de una revisión exhaustiva, no se ha podido encontrar ninguna situación que revela una relación con la vida cotidiana. La presentación de las nociones matemáticas, es totalmente descontextualizada.	**Objetivos e intenciones:** Reconocer las fracciones propias e impropias, realizando sus transformaciones. Reconocer las fracciones reducibles e irreducibles, simplificando las reducibles. Establecer las relaciones de igualdad y desigualdad con fracciones. **Orientaciones metodológicas:** En el prologo el autor cree que los alumnos deben desarrollar habilidades para enfrentar situaciones problemáticas, desarrollar el pensamiento creativo, inductivo. La estructura de la unidad temática tiene los elementos siguientes: objetivos específicos, contenidos básicos, acciones sugeridas, información teórica, cuestiones de estudio, ejercicios y problemas de **afianzamiento y evaluación.** Además de una parte teórica se muestra una **parte práctica** en la que se presenta una cantidad importante de ejercicios y problemas de afianzamiento, problemas complementarios y actividades de evaluación. Los ejercicios y problemas de afianzamiento, según el autor, sirven para ayudar al alumno en la comprensión y memorización de los temas abordados, además de mejorar el "adiestramiento".
Elementos históricos: Reseña breve sobre Hiparía, a quien se le reconoce el desarrollo y análisis del álgebra. Elemento histórico sin ninguna relación con los números racionales.	**Problemas y ejercicios representativos:** Del tipo: Cuestionario de preguntas abiertas: ¿Qué es una fracción?, ¿Es a/0 una fracción? ¿Por qué?, ¿Qué es un número raciona? ¿A qué se denomina número racional nulo?, ect. Ejercicios de reconocimiento de elementos de una fracción y tipo de fracciones. Reconocimiento de fracciones equivalentes. De simplificación y ampliación de fracciones. **Errores de concepción:** Más que un error, llama la atención que, el autor reclame que el libro de texto tenga una "diagramación con sentido artístico que amenizara la comprensión", atributo que no muestra este texto.

Tabla 4.13

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1992)

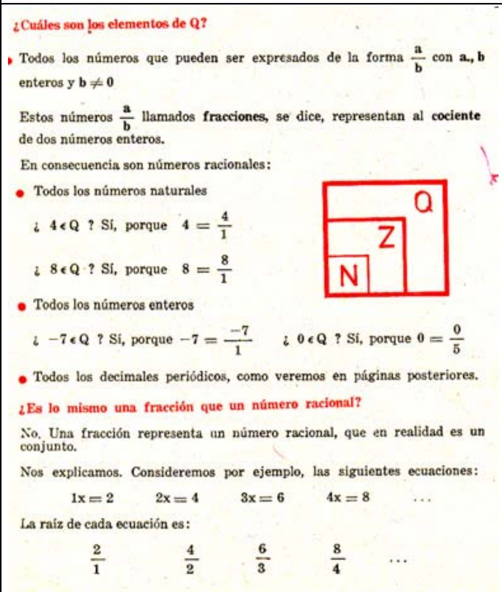
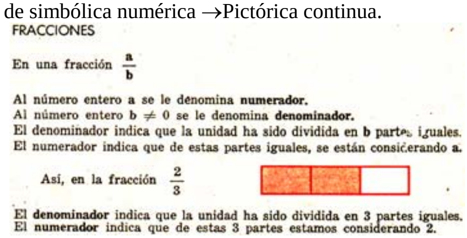
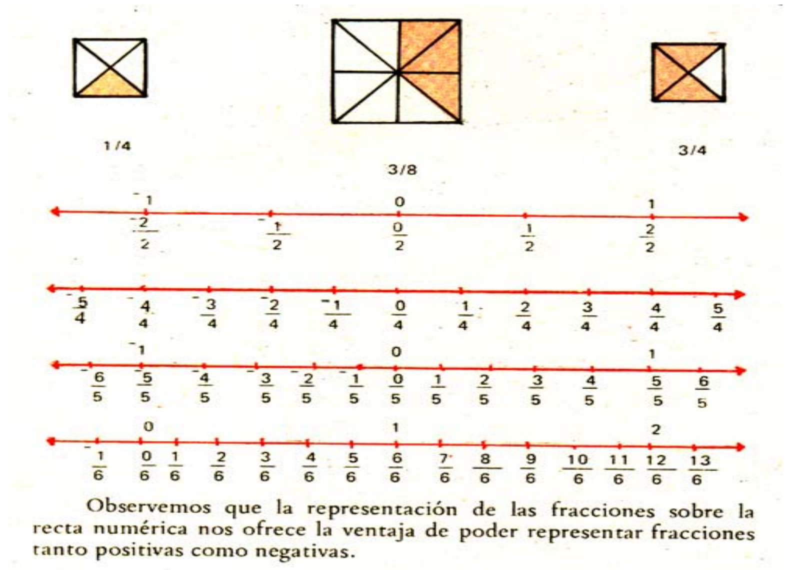
<table>
<tr><th>Significados y conceptos</th><th>Ilustraciones representativas</th><th>Análisis representacional</th></tr>
<tr>
<td rowspan="3">La imposibilidad de encontrar solución a todas las ecuaciones del tipo bx=a donde a y b son números enteros y $b \neq 0$, conduce a la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros a los números racionales donde se pueda resolver todas las ecuaciones de la forma bx=a.
Se explica que la fracción es un representante de los número racional y que la fracción representa al cociente de dos números enteros.
Caracteriza el conjunto de los número racionales como aquel:
- "Que contenga al conjunto Z de los enteros.
- Que en él se pueda resolver todas las ecuaciones de la forma bx=a con a, b enteros y $b \neq 0$.
- Que las operaciones definidas en este nuevo conjunto, satisfagan las propiedades que se cumplen en Z" Pág. 98.
En toda la Unidad 4 de Números Racionales, no se concreta la conceptualización del número racional, en la página 99 se insinúa que "...cada fracción es el cociente de dos enteros; en consecuencia, todas las fracciones (2/1, 4/2, 6/3,...) equivalen a 2. Cada fracción representa al número racional 2. Este número es el conjunto $\left\{\ldots,\frac{2}{1},\frac{4}{2},\frac{6}{3},\frac{8}{4},\frac{10}{5},\ldots\right\}$, conjunto de todas las fracciones equivalentes a 2/1."
Los significados que están presentes en el libro de texto son como cociente y como parte-todo. En la figura adjunta se puede observa el uso del pictograma que ilustra el significado parte-todo.</td>
<td rowspan="3">
¿Cuáles son los elementos de Q?
Todos los números que pueden ser expresados de la forma $\frac{a}{b}$ con a, b enteros y $b \neq 0$
Estos números $\frac{a}{b}$ llamados fracciones, se dice, representan al cociente de dos números enteros.
En consecuencia son números racionales:
• Todos los números naturales
¿ $4 \in Q$? Sí, porque $4 = \frac{4}{1}$
¿ $8 \in Q$? Sí, porque $8 = \frac{8}{1}$
• Todos los números enteros
¿ $-7 \in Q$? Sí, porque $-7 = \frac{-7}{1}$ ¿ $0 \in Q$? Sí, porque $0 = \frac{0}{5}$
• Todos los decimales periódicos, como veremos en páginas posteriores.
¿Es lo mismo una fracción que un número racional?
No. Una fracción representa un número racional, que en realidad es un conjunto.
Nos explicamos. Consideremos por ejemplo, las siguientes ecuaciones:
$1x = 2$ $2x = 4$ $3x = 6$ $4x = 8$ ...
La raíz de cada ecuación es:
$\frac{2}{1}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{8}{4}$ ...
</td>
<td>Tipos:
Las representaciones que utiliza son predominantemente simbólicas, en tanto, las visuales son muy raras. En las paginas 96-100, se definen fracción y número racional y aparece una sola vez la representación pictórica de 2/3 en su interpretación de parte-todo. Y la representación llamada diagrama de Venn para mostrar la inclusión de los conjuntos numéricos. No se usa la representación de las fracciones en la recta numérica.</td>
</tr>
<tr><td>Transformaciones:
Manipulación de signos (+, -) del numerador y denominador.
División, realización del cociente indicado.
Escritura de fracciones equivalentes, en una clase de equivalencia y su representante canónico. (ampliación de fracciones)
Simplificación de fracciones.
Regla del producto en cruz para determinar equivalencia y orden de fracciones.
Resolución de ecuaciones del tipo ($4x=8 \rightarrow x= 8/4$)</td></tr>
<tr><td>Conversiones:
Representación simbólica algebraica → Simbólica numérica. (viceversa).
Una vez excepcional de simbólica numérica →Pictórica continua.

FRACCIONES
En una fracción $\frac{a}{b}$
Al número entero a se le denomina numerador.
Al número entero $b \neq 0$ se le denomina denominador.
El denominador indica que la unidad ha sido dividida en b partes iguales.
El numerador indica que de estas partes iguales, se están considerando a.
Así, en la fracción $\frac{2}{3}$
El denominador indica que la unidad ha sido dividida en 3 partes iguales.
El numerador indica que de estas 3 partes estamos considerando 2.</td></tr>
<tr><th>Análisis fenomenológico</th><th colspan="2">Aspectos metodológicos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Aplicaciones a la vida cotidiana:
No registra situaciones problemáticas que reflejen aplicaciones del los números racionales a la vida cotidiana.</td>
<td colspan="2">Objetivos e intenciones:
- Fomentar el desarrollo de la capacidad de pensar de los educandos a través del tratamiento coherente de sus contenidos.
- Instrumentar a los estudiantes con los elementos matemáticos básicos con los que puedan, por un lado, afrontar con éxito los problemas cuantitativos más comunes de la vida y, por otro, continuar sus estudios de profundización y ampliación en la Educación Superior.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Orientaciones metodológicas:
Como se percibe de la descripción del libro de texto se comprende que la estrategia es netamente deductiva, primero se enuncia algunas generalidades y posteriormente se aplican éstas en ejemplos, ejercicios desarrollados y; finalmente, se propone ejercicios con la intención de reforzar el aprendizaje del enunciado general. Este enfoque corresponde a una concepción conductista donde el primer recurso es el estímulo-refuerzo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Elementos históricos:
No registra elementos históricos.</td>
<td colspan="2">Problemas y ejercicios representativos: del tipo
- Evaluación de proposiciones (V o F) que revisan la inclusión de conjuntos numéricos, reforzamiento de la condición $b \neq 0$.
- Hallar el valor de x (Resuelva las ecuaciones).
- Aplicación de la regla del aspa o multiplicación en cruz para determinar la equivalencia de fracciones.
- Ejercicios de reforzamiento de simplificación y de fracciones.
- Ejercicios de determinación de relación de orden de fracciones.
- Ordenar de menor a mayor un conjunto de 3 fracciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Errores de concepción:</td></tr>
</table>

Tabla 4.14

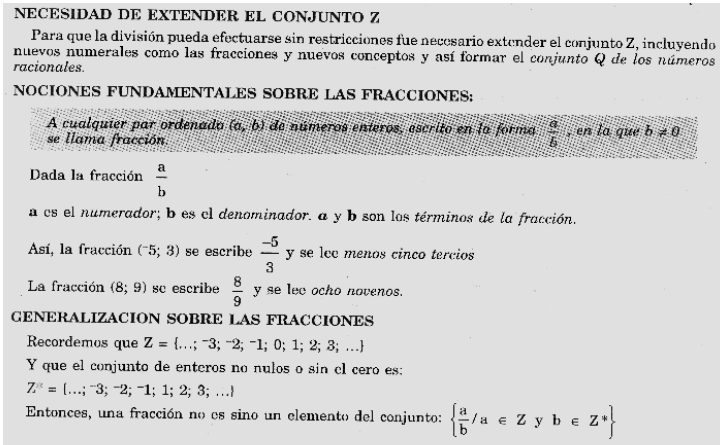
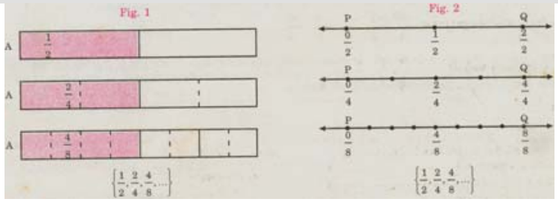
Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1993)

<table>
<tr><th>Significados y conceptos</th><th>Ilustraciones representativas</th><th>Análisis representacional</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Luego de evidenciar la insuficiencia de los enteros, explica que la división es una operación parcialmente definida en Z, y propone su ampliación:
El concepto de fracción que postula el autor es: “Llamamos fracción al número de la forma $\frac{a}{b}$ (o a/b), siendo a y b números enteros, con b≠0.” Considerando la fracción como el cociente a/b.
La definición que propone de número racional es:
“Llamamos número racional $\left[\frac{a}{b}\right]$ al conjunto de todas las fracciones equivalentes a/b, en la que a y b son números enteros, con b≠0”. Y todos los números racionales conformar el conjunto Q de números racionales.
Es explícito en señalar que el denominador b de la fracción indica las partes en las que se ha dividido la unidad y el numerador a indica que de esas partes iguales se han tomado a, de ellas. (Pág. 155). La figura adjunta ratifica la aseveración anterior que el significado de fracción que esta utilizando, el autor, es el de “parte-todo”.</td>
<td rowspan="3">
</td>
<td>Tipos:
La representaciones que usa son:
Simbólica numérica
Simbólica algebraica
Pictórica continua.
Gráfica en la recta numérica.
Verbales</td></tr>
<tr><td>Transformaciones:
Simplificación de fracciones.
Escritura de clases de equivalencia.
Aplicación de la multiplicación en cruz para determinar el orden y equivalencia de fracciones.</td></tr>
<tr><td>Conversiones:
Pictóricas → simbólica numérica (viceversa).
Simbólica numérica → gráfica en la recta numérica (viceversa).
Simbólica algebraica → simbólica numérica.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Análisis fenomenológico</th><th>Aspectos metodológicos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Aplicaciones a la vida cotidiana:
Sólo en el primer párrafo de la unidad se hace referencia a la “Vida cotidiana” para enumerar tres situaciones en las que no es posible emplear los números enteros para describir la situación:
1- Diez y media de la mañana.
2- Un metro tres cuartos de tela.
3- Kilómetro cuatro y medio.
Mas allá de estos ejemplos no se encontraron situaciones de la vida real.</td>
<td>Objetivos e intenciones:
Organizar y formalizar ideas matemáticas previas que ya posee el estudiante en base a la capacidad de reflexión y análisis.
“Identificar números racionales y resolver con ellos situaciones aplicando las propiedades y técnicas operativas propias del conjunto de los números racionales” (Pág. 153)</td></tr>
<tr><td>Orientaciones metodológicas:
La estructuración del libro pretende, según el autor, se ha tenido en cuenta, que los “diversos aspectos matemáticos no sólo se aprenden y memorizan, sino que, fundamentalmente, se comprenden y razonan.”
Cada unidad temática esta organizado así: una síntesis teórica, un grupo de ejercicios tipo resueltos, un cuestionario y ejercicios propuestos.
Se recomienda al estudiante, resolver todos los ejercicios tipos resuelto por su cuenta y sólo luego de ello verificar el proceso y resultados.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Elementos históricos:
No registra.</td>
<td>Problemas y ejercicios representativos:
Al final de la unidad se propone un cuestionario con preguntas abiertas como estas “¿Qué es un número raciona?, ¿Qué es una fracción?, ¿Cómo se representa una fracción?, ¿Cuándo se dice que dos o más fracciones son equivalentes?”, etc. A continuación algunos ejercicios propuestos concernientes a “Indicar el numerado y denominador de las fracciones, representar en la recta numérica las fracciones, escribir cinco fracciones equivalentes, simplificar fracciones, escribir diez elementos (o fracciones equivalentes) de cada uno de los siguientes números racionales, completar con < o >, hallar la fracción irreducible, ordenar en forma ascendente, etc,”
Cada uno de estos ejercicios tienen la finalidad de revisar, una vez más, las nociones, conceptos y propiedades de las fracciones.</td></tr>
<tr><td>Errores de concepción: No se percibieron.</td></tr>
</table>

Tabla 4.15

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1995)

Significados y conceptos	Ilustraciones representativas	Análisis representacional
Luego de evidenciar con ejemplos las limitaciones de los números enteros para efectuar ciertas divisiones, se presentan algunas afirmaciones como éstas: "La ecuación 3 x = 7 no tiene solución en Z, pues 7/3 no es entero" (Pág. 93). "A cualquier par ordenado (a, b) de números enteros, escrito en la forma $\frac{a}{b}$, en la que b≠0 se llama fracción". No hay una presentación explícita de los significados del número racional. Más aún se fundamenta los racionales desde la necesidad de extender el conjunto de los números racionales. En la fundamentación se encuentra el significado de cociente indicado como consecuencia de resolver la ecuación. A diferencia de las ediciones anteriores, en ésta, se enuncia la definición de: "Número racional es pues el conjunto de todas las fracciones equivalentes entre sí y puede estar representado por cualquier de sus elementos, generalmente el más simple". El **significado parte-todo** es utilizado para explicar fracciones equivalentes, tal como se muestra en la figura adjunta.	 **NECESIDAD DE EXTENDER EL CONJUNTO Z** Para que la división pueda efectuarse sin restricciones fue necesario extender el conjunto Z, incluyendo nuevos numerales como las fracciones y nuevos conceptos y así formar el *conjunto Q de los números racionales.* **NOCIONES FUNDAMENTALES SOBRE LAS FRACCIONES:** *A cualquier par ordenado (a, b) de números enteros, escrito en la forma $\frac{a}{b}$, en la que $b \neq 0$ se llama fracción.* Dada la fracción $\frac{a}{b}$ **a** es el *numerador*; **b** es el *denominador*. **a** y **b** son los *términos de la fracción.* Así, la fracción (⁻5; 3) se escribe $\frac{-5}{3}$ y se lee *menos cinco tercios* La fracción (8; 9) se escribe $\frac{8}{9}$ y se lee *ocho novenos.* **GENERALIZACION SOBRE LAS FRACCIONES** Recordemos que Z = {…; ⁻3; ⁻2; ⁻1; 0; 1; 2; 3; …} Y que el conjunto de enteros no nulos o sin el cero es: $Z^* = \{\ldots; ^-3; ^-2; ^-1; 1; 2; 3; \ldots\}$ Entonces, una fracción no es sino un elemento del conjunto: $\left\{\frac{a}{b} / a \in Z \text{ y } b \in Z^*\right\}$ 	**Tipos**: Simbólica: verbal, numérica , algebraica. Gráfica: pictogramas, recta numérica y diagrama de Veen. Conjuntista: $Q = \{Q^- \cup 0 \cup Q^+\}$, $A = \{x \in N / 2x = 2+1\}$ **Transformaciones**: Manipulación de los signos (+, -) del numerador y denominador. Del representante canónico en una clase de equivalencia. Amplificación y simplificación de fracciones. Multiplicación en cruz para determinar equivalencia y relación de orden de fracciones. Calcular un extremo o un medio en equivalencia de fracciones: $\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$. Construcciones de fracciones equivalentes utilizando pictogramas. **Conversiones**: De simbólico numérico → verbal. Simbólica numérica → pictórica y viceversa. Simbólica numérica → gráfica en la recta numérica. Conjuntista → diagrama de Veen. Conjuntista → fraccional

Análisis fenomenológico	Aspectos metodológicos
Aplicaciones a la vida cotidiana: Para la introducción de las fracciones y del número racional no se refiere a situaciones de la vida real, no existen problemas o ejemplos que revelen el uso de un significado para contextualizar las fracciones. Los problemas propuestos son totalmente descontextualizados.	**Objetivos e intenciones:** De la exposición del contenido y la forma de realizarlo se puede deducir que el autor está interesado en presentar los números racionales de forma "rigurosa" como lo expresa en las "Palabras Iniciales" del texto. Presentar las nociones matemáticas totalmente descontextualizadas.
	Orientaciones metodológicas: La exposición de los contenidos cubre los contenidos de los programas vigentes como los programas experimentales. La secuencia muestra una estructura y un ordenamiento lógico y fluido dentro de un estricto rigorismo matemático, en palabras del autor,
	Problemas y ejercicios representativos: Además de problemas y ejercicios desarrollados propone gran cantidad de ejercicios de diferentes grado de dificultad. Una de las finalidades que se percibe es satisfacer las demandas de la preparación pre universitaria con la inclusión de una sección "Mirando hacia la universidad", además los problemas de razonamiento lógico matemático son excesivamente descontextualizados, pues la finalidad es reforzar las nociones desarrolladas en la sección, a fuerza de repetirlos de diferentes maneras. Las características de estos problemas y ejercicios son: Ejercicios de decisión; verdadero/falso sobre ciertas proposiciones que involucra la conceptualización de número racional, natural y entero. Ejercicios de del tipo " Si $A = \{x \in N / 2x = 2+1\}$, entonces los elementos de A son:" (Cinco en total). Reconocimiento de fracciones equivalentes.
Elementos históricos: No presenta elementos históricos.	**Errores de concepción:** Se conceptúa el "número racional" como una clase de equivalencia pero no se concretiza en la conceptualización del conjunto de los números racionales. Además,

	antes no define una clase de equivalencia como debía ser lógico para luego introducir el concepto de Q..

4.4.2.3 *Período C: Introducción del Constructivismo*

El inicio del período coincide con los años en que irrumpe el constructivismo en las aulas escolares en el Perú y el inicio de los ensayos de reforma de la educación secundaria, acompañado de programas de capacitación. En esta época se introduce la frase "Nuevo enfoque pedagógico" que tiene su fundamento pedagógico en el constructivismo, la psicología cognitiva y el socio culturalismo. Asimismo, se produce el ingreso de nuevos autores de libros de texto al escenario editorial.

Estos aires de renovación promueven un leve viraje en la orientación del tratamiento del número racional en los libros de texto que corresponden aproximadamente a los años comprendidos entre 1997 hasta la actualidad.

Se ha encontrado a su vez, que en la introducción del concepto de número racional el significado que más se estudia es el de parte-todo y cociente indicado. Se toma mayor importancia al significado parte-todo, ya que en esa dirección conduce el enunciado de los ejemplos para explicar la noción de fracción; asimismo se proponen ejercicios acompañados de registros pictóricos que representan el significado parte-todo. En un segundo plano, también está presente el significado de cociente indicado como consecuencia de la necesidad de ampliar y extender el conjunto de los números enteros.

Es importante resaltar que en este período se dedica menos esfuerzo a explicar las nociones de relación de equivalencia y clase de equivalencia; por el contrario se opta por enunciar conceptos menos 'rigurosos' y elaborados, como por ejemplo:

"Definiremos el conjunto de números racionales como el conjunto de expresiones a/b donde a y b son números enteros, siendo b≠0

$Q=\left\{\frac{a}{b} / a \in Z, b \in Z, b \neq 0\right\}$" L.T. 2003-C.

"Número racional como par ordenado de números enteros así $Q=\{(a,b) / a \in Z \wedge b \in Z-\{0\}\}$" L.T. 2005.

"El número racional es una fracción y todos sus equivalentes" L.T. 1997.

En tanto que la definición de fracción que postulan son:

“Fracción es pues, un conjunto de unidades fraccionarias” L.T. 2003-A

“Una fracción es una división indicada de dos enteros *a* y *b*” L.T. 2003-B

“Todas las fracciones pertenecen a una clase de equivalencia” L.T. 2000-A

“Fracción es cada una de las partes en que se ha dividido un todo” L.T. 2000-B.

Merece mención aparte los textos L.T. 2000-A y L.T. 1997, ambos realizan una revisión ordenada de los significados: la fracción como parte de la unidad, fracción como resultado de una medida, fracción como cociente y fracción como operador y dedican un capítulo posterior al contenido temático “Proporcionalidad numérica “ en el cual se desarrolló el significado de razón, entendido como “la comparación de un número con otro mediante el cociente indicado de dichos números se llama razón” L.T. 2000-A. y el L.T. 1997 define la razón como “... el cociente de dos números o de dos cantidades comparables”, como podemos percibir, nuevamente como en el período anterior, la razón queda subordinado al significado de cociente indicado. A pesar de las limitaciones es un gran avance el que dan los autores (autoría colectiva) de los libros de texto en mención por el esfuerzo desplegado para explicar casi todos los significados del número racional.

Queda evidente que en este período se enfatiza el significado parte-todo y se refieren al significado de cociente indicado como prolongación de la corriente del período anterior. Respecto a los demás significados, se encontró que son subsidiarios en la construcción del concepto de número racional.

El desarrollo de la noción de fracción se basa en situaciones de la relación parte-todo; además, el estudio de relaciones de equivalencia y orden se fundan en transformaciones y manipulación de pictogramas, que representan la partición de un todo continuo.

Sin embargo, se ha detectado imprecisiones en la conceptualización del Conjunto de los Números Racionales como el conjunto formado por los números enteros y números fraccionarios que deja abierta la posibilidad de aceptar que $\frac{\pi}{2}$ pertenezca al conjunto de los racionales, lo que evidentemente es un error.

La siguiente figura ilustra la ruta de construcción del número racional que los libros de texto siguen en la exposición del concepto en cuestión.

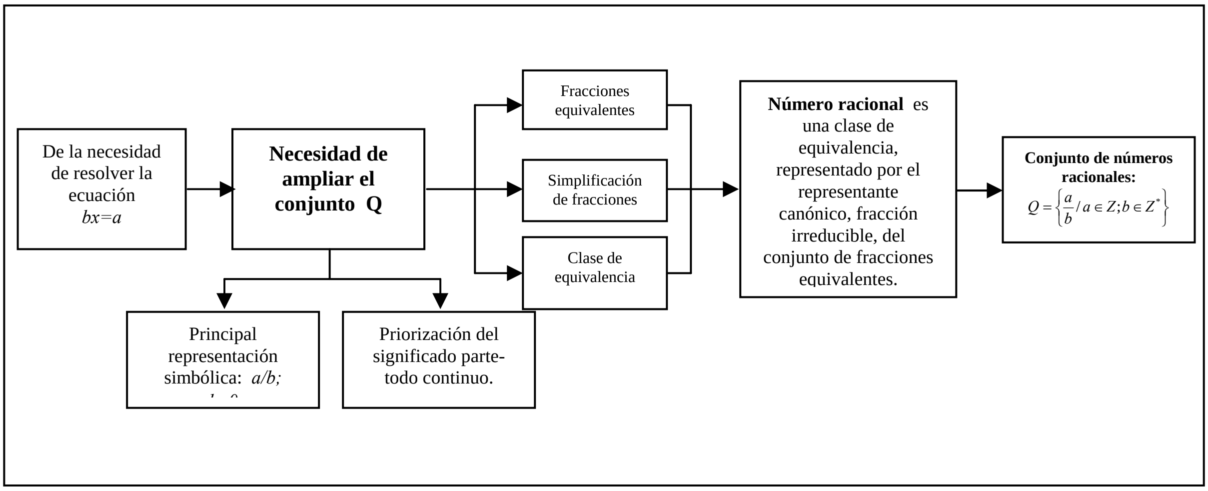


Figura 4.4 Ruta de construcción del concepto de número racional en el período C.

Tabla 4.16

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.1997)

Significados y conceptos

Luego de mostrar la insuficiencia de los números enteros para ciertas soluciones (5:3∉Z) pasa inmediatamente exponer los significados de las fracciones. En este texto al igual que en el 2000-A no se considera la razón como unos de los significados, quizás porque existe una unidad didáctica posterior que se ocupa de la razón y proporción.

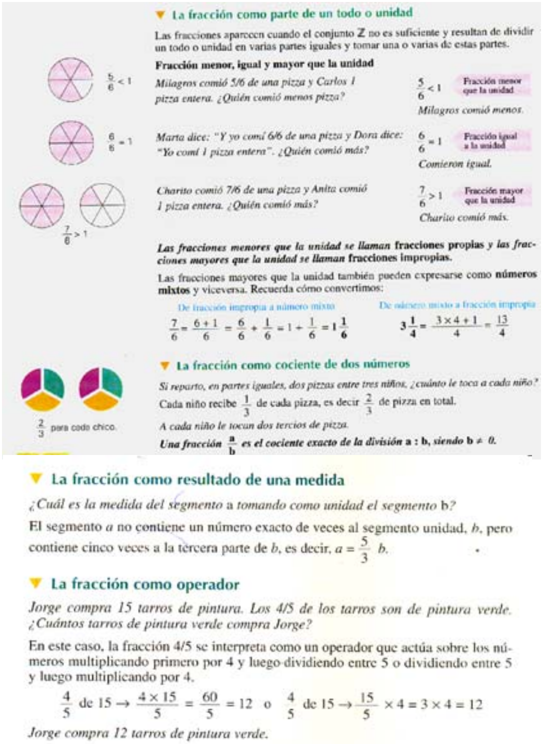
Los significados que se explican en el libro de texto son: la fracción como parte-todo, la fracción como cociente de dos enteros, como resultado de una medida y como operador.

En la página 80 se esboza el concepto siguiente de: **“Un número racional es una fracción y todas su equivalentes.”** ***Y ejemplifica*** **“El conjunto de todas las fracciones equivalentes a ½ constituye el número racional ½”,**

Razón entre dos números o entre dos cantidades: (Pág. 99)

“Una razón es el cociente de dos números o de dos cantidades comparables”. En una razón, el dividendo se llama antecedente y el divisor se llama consecuente.

Ilustraciones representativas



▼ La fracción como parte de un todo o unidad

Las fracciones aparecen cuando el conjunto **Z** no es suficiente y resultan de dividir un todo o unidad en varias partes iguales y tomar una o varias de estas partes.

Fracción menor, igual y mayor que la unidad

Milagros comió 5/6 de una pizza y Carlos 1 pizza entera. ¿Quién comió menos pizza? $\frac{5}{6} < 1$ Fracción menor que la unidad. *Milagros comió menos.*

Marta dice: "Y yo comí 6/6 de una pizza y Dora dice: "Yo comí 1 pizza entera". ¿Quién comió más? $\frac{6}{6} = 1$ Fracción igual a la unidad. *Comieron igual.*

Charito comió 7/6 de una pizza y Anita comió 1 pizza entera. ¿Quién comió más? $\frac{7}{6} > 1$ Fracción mayor que la unidad. *Charito comió más.*

***Las fracciones menores que la unidad se llaman* fracciones propias *y las fracciones mayores que la unidad se llaman* fracciones impropias.**

Las fracciones mayores que la unidad también pueden expresarse como **números mixtos** y viceversa. Recuerda cómo convertimos:

De fracción impropia a número mixto: $\frac{7}{6} = \frac{6+1}{6} = \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$

De número mixto a fracción impropia: $3\frac{1}{4} = \frac{3 \times 4 + 1}{4} = \frac{13}{4}$

▼ La fracción como cociente de dos números

Si reparto, en partes iguales, dos pizzas entre tres niños, ¿cuánto le toca a cada niño?

Cada niño recibe $\frac{1}{3}$ de cada pizza, es decir $\frac{2}{3}$ de pizza en total.

A cada niño le tocan dos tercios de pizza.

Una fracción $\frac{a}{b}$ ***es el cociente exacto de la división a : b, siendo b ≠ 0.***

$\frac{2}{3}$ para cada chico.

▼ La fracción como resultado de una medida

¿Cuál es la medida del segmento a *tomando como unidad el segmento* b*?*

El segmento *a* no contiene un número exacto de veces al segmento unidad, *b*, pero contiene cinco veces a la tercera parte de *b*, es decir, $a = \frac{5}{3}\ b$.

▼ La fracción como operador

Jorge compra 15 tarros de pintura. Los 4/5 de los tarros son de pintura verde. ¿Cuántos tarros de pintura verde compra Jorge?

En este caso, la fracción 4/5 se interpreta como un operador que actúa sobre los números multiplicando primero por 4 y luego dividiendo entre 5 o dividiendo entre 5 y luego multiplicando por 4.

$\frac{4}{5}$ de $15 \rightarrow \frac{4 \times 15}{5} = \frac{60}{5} = 12$ o $\frac{4}{5}$ de $15 \rightarrow \frac{15}{5} \times 4 = 3 \times 4 = 12$

Jorge compra 12 tarros de pintura verde.

Análisis representacional

Tipos:

En este libro de texto se utilizan las siguientes representaciones:

Simbólicas: como enunciado verbal, numérico, y algebraico.

Visuales: segmentos de recta, pictóricas, y la recta numérica.

En la sección “Programa de gráficos y medios de comunicación”.

Transformaciones:

Simbólicas para escribir fracciones equivalentes.

Pictogramas para ilustrar equivalencia de fracciones.

Ampliación y simplificación de fracciones, pictórica y simbólicamente.

Comparación de fracciones tanto, con representaciones simbólicas y pictóricas.

De fracción impropia a número mixto, tanto numérica como pictóricamente.

Representación algebraica del uso del operador.

Regla de la multiplicación en cruz para determinar equivalencia y orden de fracciones, tanto numérica y algebraicamente.

Conversiones:

Simbólica numérica → pictórica (viceversa).

Simbólica numérica → gráfica en la recta numérica (viceversa).

Simbólica algebraica → simbólica numérica.

Verbal → simbólica numérica.

Análisis fenomenológico

Aplicaciones a la vida cotidiana:

En la explicación de los diferentes significados de la fracción se utiliza situaciones concretas de la vida real.

En la sección “Matemática en la práctica”, también, se encuentra cuatro situaciones problemáticas que revelan el interés por aplicar el conocimientos de los números racionales en la vida real.

Elementos históricos:

En la página 93 se ha encontrado un ejercicio que refiere la escritura egipcia de fracciones, dada la simbología se propone realizar cálculos de división de fracciones.

Aspectos metodológicos

Objetivos e intenciones: No explicita la intenciones de la unidad temática.

Orientaciones metodológicas:

Cada unidad temática esta organizado en siete partes: página inicial, información básica, actividades, matemática en la práctica, razonamiento matemático, programas de gráficos y medios de comunicación y página final con programa de solución de problemas.

Problemas y ejercicios representativos:

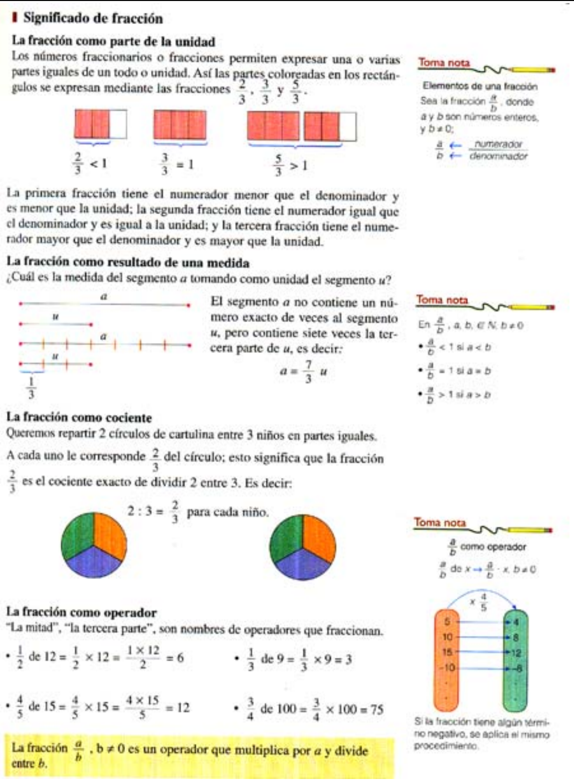
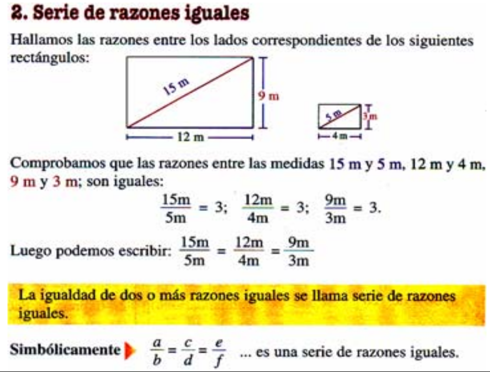
Existe ejercicios de traducción de representación pictórica a simbólica y viceversa, tratamiento de fracciones impropias a números mixtos, aplicación de los significados a situaciones problemáticas, escritura de fracciones equivalentes, simplificación y manipulación de signos (+ y -), comparación de fracciones y representación de fracciones en la recta numérica. En términos generales en las actividades propuestas al estudiante se percibe la intención de repasar los conceptos y nociones desarrollados en la unidad con el objeto de entender el concepto de número racional.

Errores de concepción:

El concepto: *“El conjunto formado por los números enteros y los números fraccionarios es el conjunto de los números racionales”.* Puede constituir un error, cuando previamente no se define qué es un número fraccionarios. Queda abierta la posibilidad de acepta que el número $\frac{\pi}{2}$ es un número racional, lo que evidentemente es un error.

Tabla 4.17

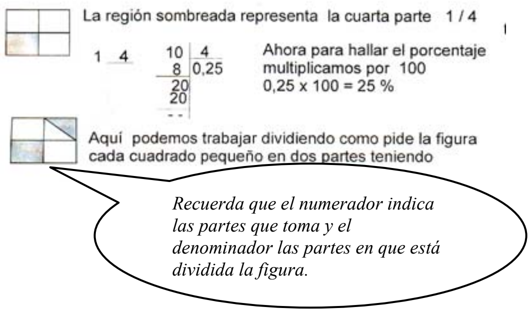
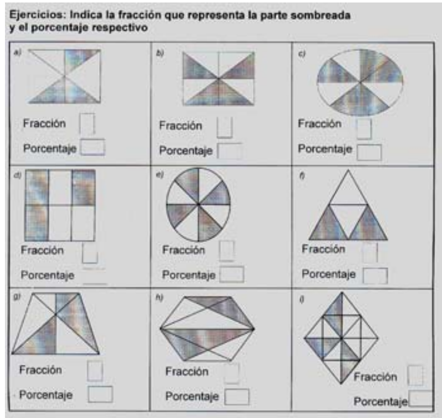
Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T. 2000-A)

Significados y conceptos	Ilustraciones representativas	Análisis representacional
Este libro de texto explica los significados de la fracción como parte de la unidad, la fracción como resultado de una medida, como cociente y como operador. El significado de razón se explica en la quinta unidad titulada *"Proporcionalidad numérica"*. Allí se define La razón como *"La comparación de un número con otro mediante el cociente indicado de dicho número"* Pág. 166. Así *a/b* representa la "razón de *a* en *b*". Donde *a* es el antecedente y *b* el consecuente. La ampliación del conjunto de los números enteros se presenta ante situaciones de este tipo; "*Dividir 3 m de cinta en 2 parte iguales" 3:2 $\notin Z$*". Pág. 128 se postula la necesidad de los números racionales. E inmediatamente se introduce la idea de clase de equivalencia y representante canónico: *"Todas las fracciones pertenecen a una clase de equivalencia. Veamos:* $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{4}{8}...\right\}$ *la fracción irreducible o representante canónico es* $\frac{1}{2}$. *El conjunto de los números racionales se representa con la letra Q.* *Simbólicamente:* $Q=\left\{\frac{a}{b}/\,a,b\in Z, b\neq 0 \wedge m.c.d.(a,b)=1\right\}$ " Razón entre dos números: (Pág. 166) *"La comparación de un número con otro mediante el cociente indicado de dichos números, se llama razón.", a/b* donde *a* es el antecedente y *b* el consecuente.		**Tipos**: Para el autor los números racionales tiene dos representaciones: el representante canónico del conjunto de fracciones equivalentes, o sea fracción irreducible; y la representación gráfica sobre la recta numérica en el que se divide cada segmento unidad en partes iguales como indica el denominador y se cuenta el número de partes que indica el denominador. Además, se encuentran en el libro otras representaciones como: simbólica verbal, numérica y algebraica; pictórica, y sagital para representar el significado de operador. **Transformaciones**: Multiplicación en cruz para verificar equivalencia de fracciones. Simplificación de fracciones. Reconocer y Completación de fracciones equivalentes. Construcción de clase de equivalencia. Aplicación del operador. **Conversiones**: Simbólica numérica → Simbólica algebraica (viceversa) Simbólica numérica → Gráfica en la recta numérica (viceversa). Simbólica numérica → Pictórica (viceversa). Verbal → Simbólica numérica. 

Análisis fenomenológico	Aspectos metodológicos
Aplicaciones a la vida cotidiana: En las páginas 124 y 125, de la sección motivacional, ejemplifican situaciones de la vida diaria en las que se usa fracciones y decimales.	**Objetivos e intenciones:** El objetivo de la unidad es explicar cómo se forma el conjunto de los números racionales, reconocer ***Q*** como un conjunto muy denso, representar los números ***Q*** de diferentes formas, identificar y establecer relaciones entre los números racionales, y otros concernientes a operaciones con fracciones. **Orientaciones metodológicas:** La unidad esta estructura en partes, entrada y motivación, sección de conocimientos previos, momento básico, ejercicios resueltos y propuestos, momentos del repaso, extensión y un momento de evaluación.
Elementos históricos: No registra.	**Problemas y ejercicios representativos:** En la sección "*Recuerdo y resuelvo, conocimientos previos*" se plantea cuestiones como escribir la representación simbólica de fracciones representadas por pictogramas de rectángulos, circulares, hexágonos, pentágonos. Reconocer si las fracciones son equivalentes, hallar un elemento de una fracción para hacer equivalente a otra, simplificar las fracciones, etc. Los ejercicios son esencialmente de cálculo, no se proponen problemas contextualizados a la vida cotidiana del estudiante. La sección se concluye con una batería de ejercicios y problemas resueltos y ejercicios y problemas propuestos. Dentro de estos se encuentra ejercicios que refieren a los significados de medida, razón, operador, parte-todo. **Errores de concepción:** No se observa.

Tabla 4.18

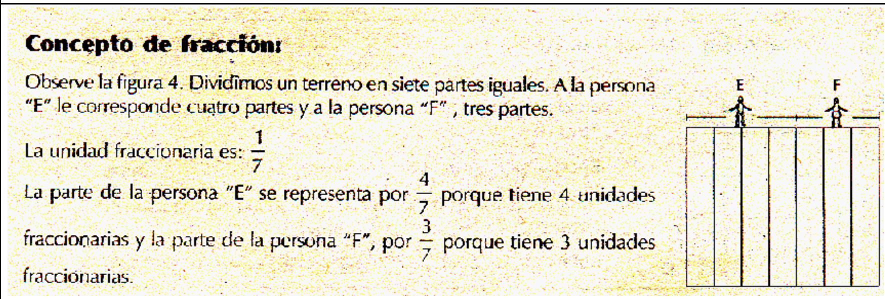
Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T. 2000-B)

Significados y conceptos	Ilustraciones representativas	Análisis representacional
***"Concepto**.- El sistema de los números racionales es un conjunto de números fraccionarios denotados por: Q teniendo las operaciones de Adición, Multiplicación, sustracción y División.* ***NÚMERO RACIONAL .-** Son aquellos números enteros y fraccionarios en cuyo campo siempre es posible realizar las cuatro operaciones fundamentales excepto la división entre cero.* ***Fracción** .- Tiene la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$* *Es cada una de las partes en que se ha dividido un todo.* *Es una relación o cociente entre dos números enteros "n", "d" con $d \neq 0$.* *Llamado también quebrado o número racional."* (Pág. 118) Se percibe en este texto que se distingue los significados parte-todo, la fracción como cociente y en su representación porcentual. Aunque explícitamente no se señala esta la definición de Q como el conjunto de pares ordenados: $Q = \{(a,b) / a \in Z \wedge b \in Z - \{0\}\}$	 	**Tipos**: Simbólica numérica y algebraica. Pictórica. Gráfica en la recta numérica. Verbal. **Transformaciones**: Fracciones impropias en números mixtos. Realización del cociente indicado. De fracción a porcentaje. Construcción de fracciones equivalentes. Partición reiterada de pictogramas con el objeto de ilustrar fracciones equivalentes. Simplificación de fracciones. **Conversiones**: Simbólica numérica → pictórica. (viceversa). Simbólica numérica → gráfica en la recta numérica. Simbólica numérica → verbal.

Análisis fenomenológico	Aspectos metodológicos
Aplicaciones a la vida cotidiana: En la presentación del concepto de número racional se utiliza situaciones de la vida real con la finalidad de contextualizar el contenido.	**Objetivos e intenciones:** No se encuentra explícito.
	Orientaciones metodológicas: De lo manifestado en la presentación del libro de texto, el libro pretende tener un carácter teórico práctico, ayudando al estudiante en la resolución de problemas, demostraciones.
Elementos históricos: No registra.	**Problemas y ejercicios representativos:** Los ejercicios propuestos en las páginas 119-120 tienen la finalidad de reforzar el significado de fracción como parte-todo relacionado al porcentaje.
	Errores de concepción: El concepto presentado en la página 118 *"El sistema de los números racionales es un conjunto de números fraccionarios..."* adolece de imprecisiones. Bajo este concepto se aceptaría que el número fraccionario $\frac{\pi}{2}$ pertenece al conjunto de los racionales. Evidentemente que esto es un error.

Tabla 4.19

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.2003-A)

Significados y conceptos	Ilustraciones representativas	Análisis representacional
A partir de ejemplo de casos de repartición de quesos o terrenos se introduce el significado de, "*unidad fraccionaria es cada una de las partes iguales en que se ha dividido la unidad principal*", Luego define el concepto de fracción: "... *Fracción es, pues, un conjunto de unidades fraccionarias*". "*Las expresiones* $\frac{4}{7}$ *y* $\frac{3}{7}$ *se denominan* ***números fraccionarios, también se les llama números quebrados o fracciones.*"** Pág. 224. Se conceptúa la fracción utilizando el significado parte-todo. En la introducción del concepto de fracción utiliza sólo el significado de parte-todo. **Significado "Razón o relación":** (Pág. 307) **"Es el resultado de comprar dos cantidades por medio de una sustracción (razón aritmética) o por medio de una división (razón geométrica). La comparación en sentido estricto está dado por la diferencia y el cociente respectivamente, de dichas operaciones."**	 **Concepto de fracción:** Observe la figura 4. Dividimos un terreno en siete partes iguales. A la persona "E" le corresponde cuatro partes y a la persona "F", tres partes. La unidad fraccionaria es: $\frac{1}{7}$ La parte de la persona "E" se representa por $\frac{4}{7}$ porque tiene 4 unidades fraccionarias y la parte de la persona "F", por $\frac{3}{7}$ porque tiene 3 unidades fraccionarias. 	**Tipos**: Simbólica numérica, Simbólica verbal. Gráfica pictórica. **Transformaciones**: En la representación pictórica y simbólica numérica para exponer fracciones equivalentes, simplificación de fracciones y reducción de fracciones a común denominador. Transformaciones en la representación simbólica numérica para explicar fracciones impuras, inversa, **Conversiones**: Con el subtítulo de "Escritura y lectura de números fraccionarios" se presenta casos de conversión: De simbólica verbal a simbólica numérica y viceversa. De simbólica verbal $\rightarrow$ pictóricas y viceversa.

Análisis fenomenológico	Aspectos metodológicos
Aplicaciones a la vida cotidiana: En la exposición del contenido se ha encontrado, en tres oportunidades, la referencia a situaciones de la vida real. Situaciones relacionados con el tiempo: 1 hora = $\frac{1}{2}$ de día, etc. Situación de división de un terreno en siete parte.... Situación de división de un pedazo de madera. Los casos anteriores a pesar de referirse a una 'situación de división', estos, no corresponde al significado de cociente de la fracción, sino, al de parte-todo.	**Objetivos e intenciones:** No los presenta en forma expresa. Sin embargo, se deduce que la principal preocupación del autor es satisfacer las demandas de una preparación pre universitaria, memorización de algoritmos por medio de la resolución reiterada de ejercicios similares. (Véase las páginas 230-231 de explicación del algoritmo de adición de fracciones y números mixtos y la página 240 del Taller de Ejercicios). **Orientaciones metodológicas:** **El enfoque metodológico es el convencional. Luego de explicar los conceptos, algoritmos y reglas se espera que los estudiantes hagan las aplicaciones en la resolución de ejercicios.**
Elementos históricos: No presenta, ningún elemento histórico.	**Problemas y ejercicios representativos:** El bloque de ejercicios Nº 2 de la página 225 son de reforzamiento, a través de repetición de ejemplos desarrollados anteriormente. Aunque escapa a los límites del estudio, se observó la primera parte del Taller de Ejercicios Nº 38: estos son de cálculo como "Efectuar las siguientes operaciones" (suma y resta) de fracciones. Todos descontextualizados, que de seguro tienen el objetivo de reforzar el algoritmo explicado hojas atrás en el libro de texto. **Errores de concepción:** Más que un error se ha encontrado un vacío, el autor se limita a desarrollar la noción de fracción sin llegar a discutir el concepto de número racional.

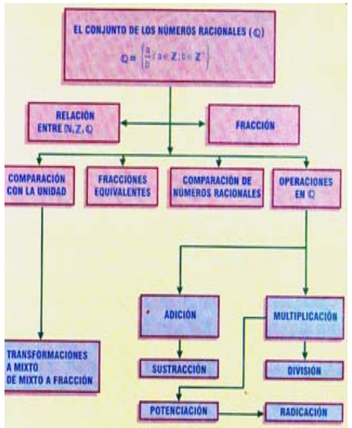
Tabla 4.20

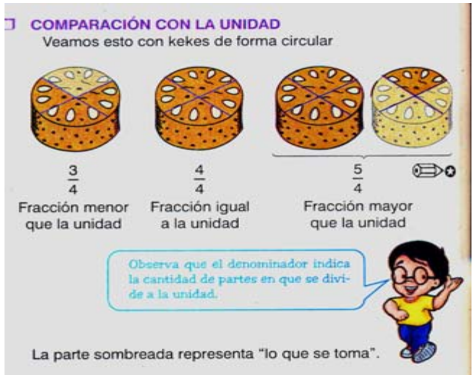
Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.2003-B)

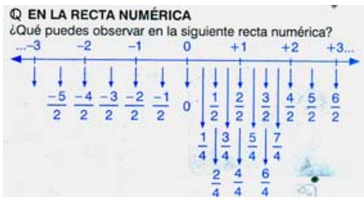
<table>
<tr><th>Significados y conceptos</th><th>Ilustraciones representativas</th><th>Análisis representacional</th></tr>
<tr><td>

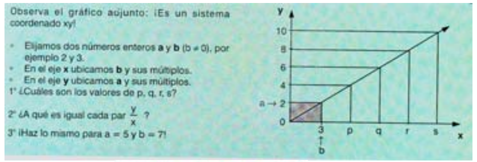
Titulo de la unidad 4 *¿Qué hay entre 0 y 1?.*
Se plantea la ampliación del conjunto de los números enteros ante la imposibilidad de solución del siguiente ejemplo:
"¿Cómo resolveríamos la ecuación? $4x = 3 \rightarrow x = [\ ]$
Verás que la solución no es ni natural ni entero sino una fracción." Pág. 84. Luego de esto se define las;
" FRACCIONES
Ante esta situación surge la necesidad de ampliar el conjunto de números enteros Z a otro que en adelante llamaremos el Conjunto de números racionales que lo reconoceremos por la letra Q y que emplea símbolos o numerales llamados fracciones.
Una fracción es una división indicada de dos números enteros a *y* b
Una fracción se representa así: $\frac{a}{b}; b \neq 0$ *"* Pág. 84.
En la ilustración se presenta el conjunto $Q = \left\{\frac{a}{b} / a \in Z; b \in Z^*\right\}$, que expresa el significado del número racional como cociente.
definición de número racional se fundamenta en la ampliación del conjunto de los números enteros. Y en una segunda instancia la define como una *'división'* indicada.
lemás la otra ilustración denota el significado de parte-todo, cuando tiene que comparar fracciones.
En la Pág. 96, se desliza el significado de fracción como operador en forma indirecta como un caso particular de la operación de multiplicación de fracciones:

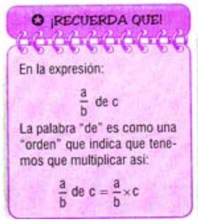
</td><td>

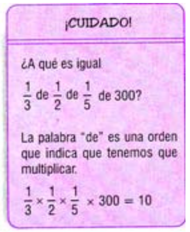










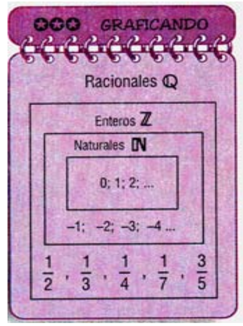


</td><td>

Tipos:
Las representaciones que se utiliza en el texto son:
Simbólica (verbal, numérica, algebraica.
Visuales; pictórica, en la recta numérica, en el sistema de ejes coordenados para mostrar fracciones equivalentes, además, del diagrama de Venn para ilustrar la inclusión de los conjuntos numéricos.

Transformaciones:
De fracción impropia a número mixto.
Para fracciones equivalentes entre la pictórica y simbólica y entre simbólica numérica y simbólica algebraica
De simplificación de fracciones.

Conversiones:
Recta numérica →simbólica numérica (viceversa)
Pictórica → simbólica numérica
Verbal-simbólico →Gráfico en sistema de coordenadas



</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Análisis fenomenológico</th><th>Aspectos metodológicos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

Aplicaciones a la vida cotidiana:
Existe una sección denominada *"Las matemáticas...de todos los días. No se trata sólo de conocer, sino de saber qué hacer con el conocimiento"*.
En esta sección presenta **situaciones** de la vida cotidiana, como el siguiente:
4) Una costurera compra una pieza de tela por S/. 45. utiliza la tercera parte para confeccionar dos vestidos por los que cobro S/. 48. Luego utiliza 4/5 del resto para confeccionar tres uniformes por los que cobró S/. 55. El resto de la tela la vendió al doble del precio. Si el costo de los materiales usados en la confección de las prendas es de S/. 3,00 y el de la mano de obra S/. 20, ¿cuál es la utilidad obtenida por la costurera?. Pág. 107.

</td><td>

Objetivos e intenciones: No registra.

</td></tr>
<tr><td>

Orientaciones metodológicas: El capítulo al inicio y al final presenta un organizador visual, además, la presentación trata de ser amena con un conjunto de ayudas para el aprendizaje a través de viñetas.
En la página 80 se presenta la intención curricular, *"..ahora trataremos sobre aquellos números que resultan de dividir una cantidad. La mitad, la tercera parte, la cuarta parte y demás números, los iremos trabajando a través de sus leyes y propiedades."*

</td></tr>
<tr><td>

Problemas y ejercicios representativos:
Los ejercicios que se proponen son esencialmente de reforzamiento de lo aprendido. Tienen las siguientes formas: Se proponen ejercicios de simplificación de fracciones y escribir pares de fracciones equivalentes (180/270). Resolver ecuaciones de primer grado con un variable que conlleven a soluciones racionales (3x=15 o 3x=5). Colorear la parte correspondiente a la fracción referida. Escribir la fracción que corresponda a una representación pictórica. Reconocer fracciones mixtas.

</td></tr>
<tr><td>

Elementos históricos: No registra hechos históricos de ningún tipo.

</td><td>

Errores de concepción: No se percibieron.

</td></tr>
</table>

Tabla 4.21

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.2003-C)

Significados y conceptos	Ilustraciones representativas	Análisis representacional
El número racional como extensión de los números enteros: Ante una situación de este tipo (+4):(-5)= ?, justifica "*Esta insuficiencia del conjunto de enteros para la operación de división, hace necesaria la extensión del Conjunto de los Enteros al <u>CONJUNTO DE NÚMEROS RACIONALES</u>, donde si es posible la división sin restricciones"* Pág. 110. Sin mayores preámbulos se introduce la definición que se puede ver en la ilustración, *Q* como el conjunto de los pares ordenados. La introducción de los racionales no se respalda en el significado parte-todo.	**<u>NOTA IMPORTANTES</u>**: La expresión $\frac{a}{b}$ ó *a/b* se llama FRACCIÓN Liego : La fracción $\frac{a}{b}$ o *a/b* es la división indicada (a) : (b) Siendo *a* y *b* enteros y *b* diferente de cero. **<u>EL CONJUNTO DE NÚMEROS RACIONALES (Q)</u>** **Definiremos el conjunto de Número racionales como el conjunto de expresiones *a/b* donde *a* y *b* son números enteros, siendo *b* diferente de cero.** $Q=\left\{\frac{a}{b}/a\in Z, b\in Z, b\neq 0\right\}$	**Tipos**: Este libro de texto se caracteriza por no presentar representaciones pictóricas de parte-todo. Las representaciones que mas predomina son: Simbólica: numérica, algebraica, conjuntista. Gráficas: La recta numérica, se utiliza pocas veces. **Transformaciones**: Manipulación del signo del numerador al denominador. De división de número enteros a notación fraccional, del tipo: $(a)\div(b)=\frac{a}{b}$, tanto de forma algebraica como numérica. De número entero a notación fraccional. Dada una fracción en sus fracciones equivalentes. De la regla del "aspa" para reconocer fracciones iguales y relación de orden. **Conversiones**: Simbólica $\rightarrow$ Recta numérica.

Análisis fenomenológico	Aspectos metodológicos
Aplicaciones a la vida cotidiana: A pesar de la declaración de intenciones *"... apremio práctico operativos de la vida laboral y la vida cotidiana"* en el libro de texto no se ha podido encontrar situaciones problemáticas que revelan la aplicación de los racionales a la vida cotidiana, menos a la laboral. Los contenidos matemáticos son presentados totalmente descontextualizados, ya de por si la definición de *Q* es una muestra de esta orientación, *Q* se desprende de la necesidad matemática de ampliar los números enteros.	**Objetivos e intenciones:** Se expresa el deseo de contribuir a la solución de situaciones prácticas operativas de la vida laboral y de la vida cotidiana y el desarrollo del razonamiento. Además de hacer uso de un lenguaje sencillo, se reclama el uso de un formalismo conceptual, verbal y simbólico y lamenta no presentar los conceptos con un "formalismo y pulcritud" por razones pedagógicas. **Orientaciones metodológicas:** En opinión de autor en el libros de texto se integra dos programas curriculares, uno tradicional y otro innovado, y deja al docente en libertad de escoger los contenidos que corresponde a cualquiera de los programas, claro esta por razones del tiempo que es insuficiente.
Elementos históricos: No se encontraron elementos históricos de ningún tipo.	**Problemas y ejercicios representativos:** Los ejercicios y problemas propuestos buscan revisar las nociones matemáticas más importantes, y procuran no descuidar "los asuntos teóricos y los operativos" con objetivos formativos y operacionales (Presentación). La proposición de ejercicios son de la siguiente naturaleza: - Convertir cada fracción en otro con denominador positivo, (dado fracciones con denominador negativo) - De conversión de representación numérica a representación en la recta numérica. - Ejercicios de decisión sobre la validez de proposiciones, por ejemplo, "Todo número racional es entero", "Existen enteros que no son racionales" etc., estos ejercicios son denominados como de "Razonamiento" - Reconocimiento de fracciones de menores y mayores que la unidad. **Errores de concepción:** Inicia la presentación del texto diciendo *"... desarrollo de manera integrada según el llamado programa tradicional y el nuevo Diseño Curricular Básico"*. Pensamos que esta afirmación revela una pobre concepción sobre el tratamiento curricular. Una propuesta curricular detrás de si tiene toda una concepción teórica que muchas veces son irreconciliables con otras.

Tabla 4.22

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.2003-D)

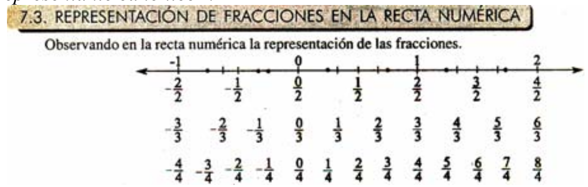
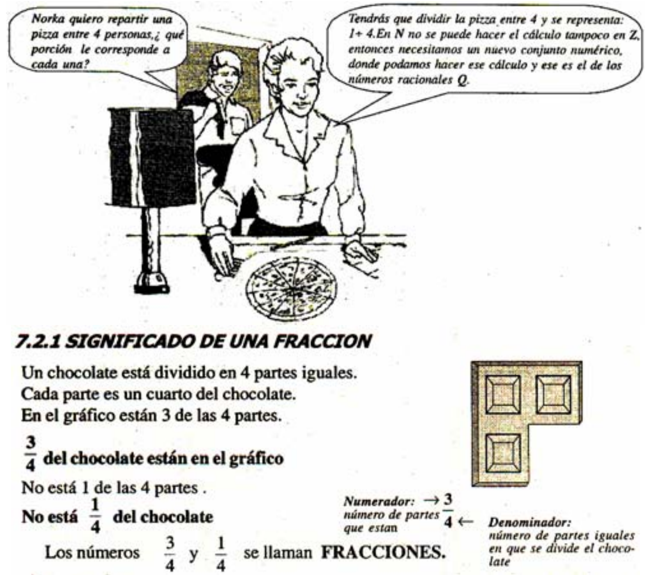
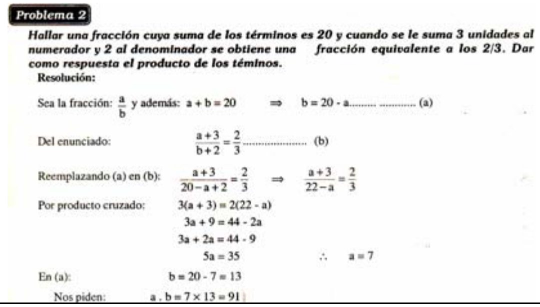
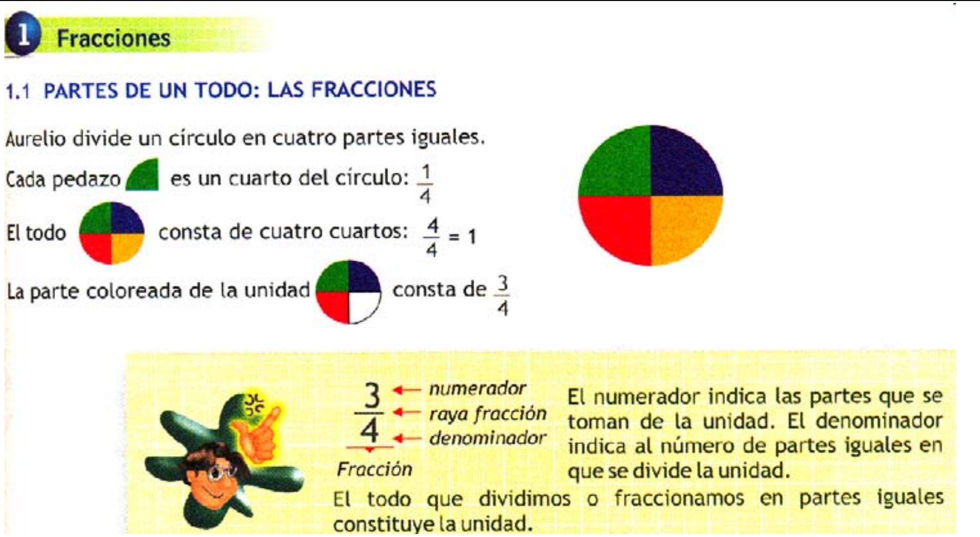
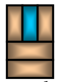
<table>
<tr><th>Significados y conceptos</th><th>Ilustraciones representativas</th><th>Análisis representacional</th></tr>
<tr><td rowspan="3">De la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros, se introduce los números racionales.
El significado parte-todo es el que sirve para introducir el “Significado de una fracción”, tal como se muestra en la figura adjunta. Además la viñeta introductoria hace referencia al contexto de cociente partitivo “Norka quiere repartir una pizza entre 4 personas, ¿qué porción le corresponde a cada una?”.
La definición de número racional se introduce a través de un ejemplo de fracciones equivalentes y su representante canónico, así se define de esta manera: “Llamamos número racional a cada conjunto de fracciones equivalentes, siendo la fracción irreducible $\left(\frac{a}{b}\right)$ su representante canónico”.

</td>
<td rowspan="3">
</td>
<td>Tipos:
Simbólica verbal, numérica, algebraica.
Visuales:
Pictórica.
Mapa conceptual, en la primera página de la unidad,
Viñeta.
Recta numérica.</td></tr>
<tr><td>Transformaciones:
Manipulación de signos en una fracción.
Regla del “aspa”.
Simplificación de fracciones.
De fracción impropia a número mixto.</td></tr>
<tr><td>Conversiones:
Recta numérica $\rightarrow$simbólica numérica (viceversa)
Pictórica $\rightarrow$ simbólica numérica
Simbólica algebraica $\rightarrow$ Simbólica numérica.</td></tr>
<tr><th>Análisis fenomenológico</th><th colspan="2">Aspectos metodológicos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Aplicaciones a la vida cotidiana:
Más allá de la viñeta que hace alusión a una situación cotidiana, en el resto de la unidad sólo se encontró algunas menciones a objetos como chocolates, galletas, suma de dinero, pero estos no están contextualizados en situaciones problemáticas que modelen fenómenos sociales o físicos.
Por ejemplo, los problemas que resuelve el autor están completamente descontextualizados de la vida cotidiana o de los significados del número racional.

Problema 2
Hallar una fracción cuya suma de los términos es 20 y cuando se le suma 3 unidades al numerador y 2 al denominador se obtiene una fracción equivalente a los 2/3. Dar como respuesta el producto de los téminos.
Resolución:
Sea la fracción: $\frac{a}{b}$ y además: $a + b = 20 \Rightarrow b = 20 - a$ .... (a)
Del enunciado: $\frac{a+3}{b+2} = \frac{2}{3}$ .... (b)
Reemplazando (a) en (b): $\frac{a+3}{20-a+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a+3}{22-a} = \frac{2}{3}$
Por producto cruzado: $3(a + 3) = 2(22 - a)$
$3a + 9 = 44 - 2a$
$3a + 2a = 44 - 9$
$5a = 35 \quad \therefore \quad a = 7$
En (a): $b = 20 - 7 = 13$
Nos piden: $a \cdot b = 7 \times 13 = 91$</td>
<td colspan="2">Objetivos e intenciones:
Competencias
“Establece la representación de los racionales en forma simbólica, viendo para ello una variedad de técnicas.
Mediante su creatividad podrá establecer modelos para casos que se le presenten, utilizando: tablas, gráficos y reglas verbales, para luego interpretar sus datos.”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Orientaciones metodológicas:
Los procedimientos:
Reconoce y simboliza a los números fraccionarios y sus propiedades.
Interpreta, construye y soluciona fracciones.
Interpreta el concepto de equidad y de proporcionalidad.
En el prologo, el autor, sugiere resolver problemas haciendo énfasis en lo analítico y no en lo apetitivo. Además, aboga por que el propósito del estudio de la matemática es el desarrollo de “habilidades y capacidades que favorezcan la comunicación, el razonamiento y la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problemas y ejercicios representativos:
Un problema resuelto de los llamado “tipo”, muestra que el objetivo es adiestrar al estudiante en la resolución de situaciones problemáticas algebraicas que están completamente descontextualizados de la vida real o los significados del número racional. (Véase la figura adjunta a la derecha).
Los problemas propuestos son del tipo:
Traducción de representación pictórica continua a simbólica numérica..
De traducción de simbólica verbal a simbólica numérica.
Completación de fracciones equivalentes, simplificación de fracciones.
Problemas de naturaleza algebraica que utiliza nociones elementales de fracciones.
Conversión de número mixto a fracción impropia y viceversa.</td></tr>
<tr><td>Elementos históricos: No registra hechos históricos de ningún tipo.</td><td colspan="2">Errores de concepción: No se percibieron.</td></tr>
</table>

Tabla 4.23

Valoración Cualitativa del Significado y Conceptos del Número Racional: Libro de Texto de Matemática 1º Grado, (Código: L.T.2005)

Significados y conceptos	**Ilustraciones representativas**	**Análisis representacional**
"…. ocurre con los números enteros; estos no llegan a expresar totalmente distintas situaciones de la vida cotidiana, como por ejemplo, cuando hablamos que hemos comprado medio kilogramo de azúcar; …" Pág. 70 "*Para solucionar situaciones como ésta y representar las anteriores, los matemáticos tuvieron necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros, considerando la existencia de otros números que se llaman números racionales, que son aquello números que provienen de la división de dos números enteros y son de la forma* $\frac{a}{b}$, *con* $b \neq o$ *."* Pág. 70 Conceptúa los números racionales como par ordenado de números enteros así: $Q = \{(a,b)/a \in Z \wedge b \in Z - \{0\}\}$ Como se observa en la ilustración el significado que se utiliza para estudiar la fracción es el de parte-todo.	 	**Tipos**: En el texto se encontró el uso de las siguientes representaciones: Verbal *'cinco octavos'*. Simbólica ½, o,6. Pictórica. **Transformaciones**: De ampliación y simplificación para obtener fracciones equivalentes. Encontrar la *fracción irreducible*. Completar el numerador para formar una fracción equivalente a una dada. Conversión de fracciones impropias a mixtas y viceversa. **Conversiones**: Gráfico pictórico. → Simbólico numérico Simbólico numérico → Gráfico pictórico Simbólico numérico → Verbal Verbal → Simbólico numérico Simbólico numérico → Verbal.

Análisis fenomenológico	**Aspectos metodológicos**
Aplicaciones a la vida cotidiana: El autor usa situaciones de la *vida cotidiana* para introducir la necesidad de las fracciones, ejemplifica casos como: '*Comprar medio kilogramo de azúcar'.* Pág. 70. *'Son las ocho y cuarto de la mañana',* *'Estamos a la altura del kilómetro 55 y medio de la carretera norte'* Pág. 73.	**Objetivos e intenciones:** No se enuncia. **Orientaciones metodológicas:** Dentro de los '*Aprendizajes esperados'* el autor propone que los estudiantes deben ubicar números racionales en la recta numérica. Intención metodológica que no se concretiza. Pág. 70.
Elementos históricos: En la página 103 se presenta una sección titulada "*Historia de la Matemática, Números Racionales"*. Aquí se refiere al significado de la fracción como cociente. Que la notación *Q* de los números racionales tiene su origen en la palabra '*quotient*'. **Otro hecho histórico mencionado es el trabajo de Fançois Viète (1540-1603) con las fracciones decimales y el aporte de Jhon Napier (1550-1617) que en 1616 postula la representación decimal y usa el punto decimal como signo de separación decimal.**	**Problemas y ejercicios representativos:** Del tipo: 1) *Representa en fracciones cada una de las partes pintadas* *e)*  2) *Colocar en un rectángulo de 4 cm x 3 cm, para cada caso, la parte correspondiente a cada fracción:* *g)* $\frac{7}{12}$ La mayoría de los ejercicios son de naturaleza operacional que son enunciados con los verbos: *Efectúa, reduce a común denominador, calcula, hallar, expresar el número decimal como fracción, simplificar, escribe el número que falta, calcula en tu cuaderno, calcula mentalmente,* etc., Algunos ejercicios de conversión: *Escriba simbólicamente, en forma de fracción: c) Siete novenos:* *Escriba en palabras las siguientes fracciones: b)* $\frac{12}{5}$. La actividad 25 (Pág. 74) se caracteriza esencialmente por ser de cálculo inmediato. Así para el significado de operador se propone ejercicios como estos: *Calcula a) 4/5 de 225 m., o este, 3/5 de 60 cuadernos, ¿Cuántos cuadernos son?*. **Errores de concepción** de tipo metodológico: no se concretiza el '*Aprendizaje esperado'* ubicar números racionales en la recta numérica. Este cometido no se trabaja, pues solo cuando se enuncia la propiedad de densidad se presenta el gráfico de dos rectas numéricas para ubicar 3/2 y 5/4. Aparte de este ejemplo en toda la unidad no se utiliza la representación en la recta numérica.

Discusión de resultados preliminares

En esta revisión y análisis detallado de los libros de texto, que se emplean en la educación secundaria, se evalúa los modelos de introducción del concepto de número racional, lo que ha implicado analizar los significados que se utilizan. En particular, se identifica los significados prevalentes, y se determina que el significado de cociente indicado sirve para introducir el número racional como consecuencia de la insuficiencia del número entero y la enfatización; especialmente, en el último período C del significado parte-todo, el que se utiliza para explicar la noción de fracción como principal representante del número racional.

Se ha constatado que el significado parte-todo es una constante en los tres períodos, con más énfasis en el último, confirmándose la conclusión a la que arriba el estudio de Escolano (2004) quien sostiene que la relación parte-todo no es generada por las necesidades humanas en el sentido que apunta Bishop (1999), sino más bien, el significado parte-todo tiene su origen en situaciones de la práctica educativa, es una especie de recurso didáctico, como un género de *transposición didáctica* interna del sistema didáctico, Chevallard (1991)

En concordancia a Escolano (2004), el significado parte-todo en los libros de texto, tienen su presencia explícita a partir de la primera mitad del siglo XX, tal como se constata en el L.T. 1963. Asimismo, coincidimos con la afirmación de este investigador que la introducción del significado parte-todo en el sistema didáctico permite abreviar los períodos de instrucción y asegurar el éxito en la evaluación de los aprendizajes y posibilita también la evaluación de situaciones didácticas más complejas que involucran significados como la medida, tal como se puede constatar en los libros de texto, este fenómeno obedece a la necesidad de tratamiento rápido y breve de la introducción del concepto de número racional.

En el último período, es evidente la priorización del significado parte-todo continuo y la periferización de los demás significados constituyéndose en significados subsidiarios al significado parte-todo. Si bien se encontró situaciones didácticas que revelan la presencia de los significados de medida, razón, operador y hasta cociente partitivo, estos hacen su presencia con ejemplificaciones que ayudan al contexto parte-todo en la conceptualización de fracción o número racional.

Así por ejemplo, en la batería de ejercicios se encontró situaciones problemáticas que necesitan para su solución la utilización de la fracción como operador, razón o cociente partitivo. Lo relevante de las observaciones es que el significado de medida se ha convertido en un apéndice decorativo, como se puede constatar en los libros de texto del segundo y tercer período. Estas apreciaciones se ilustran en la figura 4.5.

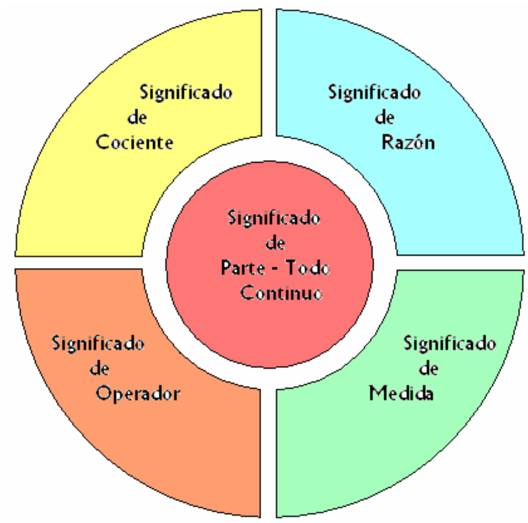


Figura 4.5 Significados periféricos en torno al significado parte-todo

4.4.3 Actividades Cognitivas Asociadas a la Representación de los Significados

4.4.3.1 Durante el período de la enseñanza tradicional

Los sistemas de representaciones utilizados en la construcción del concepto de número racional, los libros de texto utilizan las representaciones simbólicas numérica, verbal y algebraica que en el libro L.T. 1963-A se denomina “literal”. La representación verbal se emplea esencialmente para hacer lecturas de fracciones representadas en forma simbólica.

Aunque es relativamente escaso el uso de las representaciones pictóricas como la partición de ‘naranjas’, éstas son utilizadas para explicar el proceso de fraccionamiento de la unidad en partes congruentes, aplicando el significado parte-todo. Se ha encontrado en este período el uso del término ‘alícuota’ para explicar la mitad de una unidad continua.

Además, de la representación gráfica en la recta numérica de los números fraccionarios tanto positivos como negativos, los autores usan una representación análoga, los segmentos de recta para explicar la ubicación de fracciones entre 0 y 1. L.T. 1963-B.

A. Transformaciones en un Sistema de Representación

Es relevante el fenómeno de las transformaciones simbólicas, por cuanto es el de mayor incidencia y de especial énfasis en las transformaciones siguientes:

- De fracciones impropias a números mixtos.
- Simplificación de fracciones para encontrar el representante canónico o su más simple expresión.
- Reducción de fracciones heterogéneas a mínimo común denominador.
- Generación de fracciones equivalentes por multiplicación de sus elementos por un número entero.

El L.T. 1963-B dedica un capítulo a las transformaciones de fracciones, y considera las siguientes:

- Reducción de quebrados impropios a enteros o mixtos.
- Reducir un mixto a quebrado.
- Reducir un entero a quebrado de denominador dado.
- Reducir una fracción a su más simple expresión.
- Reducción de fracciones a denominador común.

El objetivo de este tipo de transformaciones es básicamente para adiestrar al estudiante en la manipulación simbólica de las fracciones, y posibilitar la realización de operaciones como la adición, multiplicación de fracciones.

B. Las conversiones entre sistemas de representación no son obvias, Duval (1995) señala que éstas son las más importantes para promover comprensión de un objeto matemático. En este período, los autores desarrollan conversiones de tres tipos básicamente; de verbal a simbólica numérica, de la recta numérica a simbólica numérica y las conversiones de pictórica a numérica simbólica y viceversa. Es evidente que el centro de estas conversiones son las representaciones simbólicas y numéricas, como se muestra en la figura 4.6.

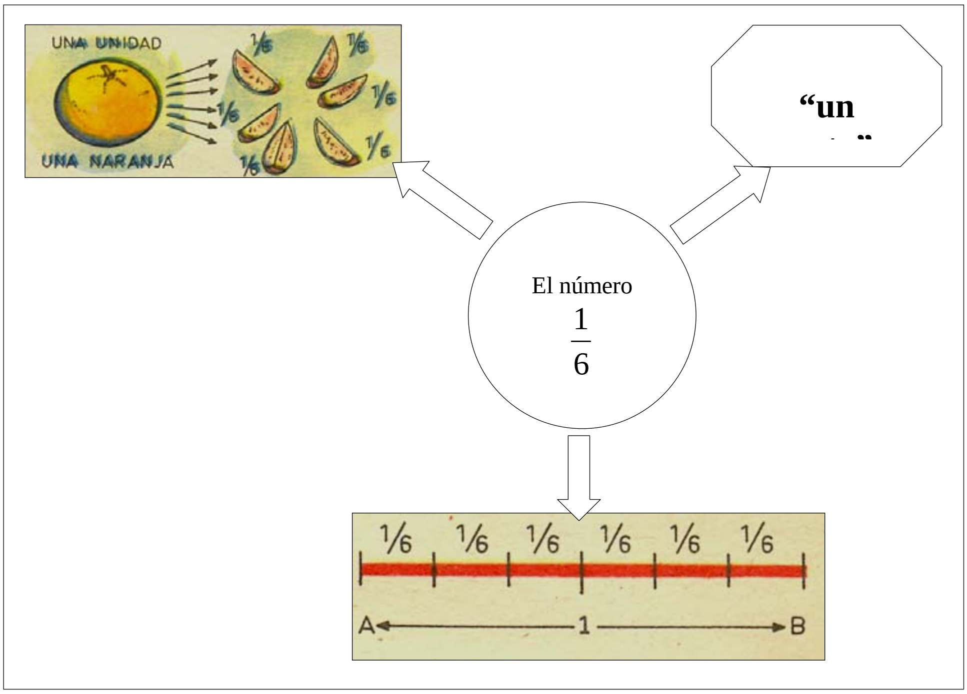
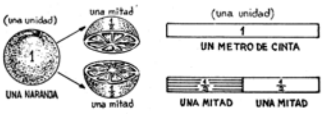
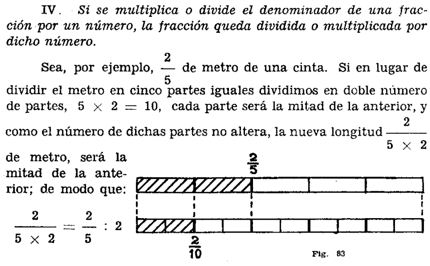


Figura 4.6 Centralismo del registro simbólico numérico fraccional

Es una tendencia general la priorización de las representaciones simbólica numérica inicialmente y luego la algebraica, y en torno a éstas se consideran las demás como auxiliares para la transmisión de significados.

Tabla 4.24

Transformaciones y conversiones de los registros de representación y el significado de fracción

Tipos de gráfico	Significado /noción	Transformaciones	Conversiones
 L.T.1963-A	Se enfatiza el significado parte-todo.	De la unidad (1) como la reunión de dos mitades (1/2).	De gráfica pictórica a simbólica numérica.
 IV. *Si se multiplica o divide el denominador de una fracción por un número, la fracción queda dividida o multiplicada por dicho número.* Sea, por ejemplo, $\frac{2}{5}$ de metro de una cinta. Si en lugar de dividir el metro en cinco partes iguales dividimos en doble número de partes, $5 \times 2 = 10$, cada parte será la mitad de la anterior, y como el número de dichas partes no altera, la nueva longitud $\frac{2}{5 \times 2}$ de metro, será la mitad de la anterior; de modo que: $\frac{2}{5 \times 2} = \frac{2}{5} : 2$ L.T.1963-A	El gráfico utiliza el significado parte-todo. Se trata de dividir una cinta en cinco partes, de las cuales se considera dos.	Al interior de la representación simbólica y gráfica se efectúa transformaciones, que muestran la multiplicación del denominador por un número e ilustrar la división de la fracción	Muestra una conversión de representación simbólica a gráfica pictórica

4.4.3.2 Durante el período de la Matemática Moderna

Los **tipos de representaciones** que se utilizan en los libros de texto pertenecientes a este período son los convencionales: simbólico numérico fraccional, simbólico algebraico, conjuntista y verbal. En este período se hace especial énfasis en las representaciones simbólicas, en tanto que las gráficas son muy escasas, en las pocas representaciones pictóricas que aparece se transmite el significado parte-todo. La predilección por los registros simbólicos obedece a la necesidad que tienen de presentar de modo formal las definiciones y conceptos, como es el conjunto de los números racionales. Conceptos tales como clase; clase de equivalencia; propiedades reflexiva, simétrica y transitiva; par ordenado y cociente indicado de enteros, requieren de un lenguaje matemático más formalizado, esta fue la tendencia en este período de estudio.

Especial mención amerita el lenguaje conjuntista que se maneja en los libros de texto relacionados a la perspectiva de la matemática moderna, así el L. T. 1995 utiliza este registro $Q = \{Q^- \cup 0 \cup Q^+\}$ con la intención de explicar la composición del conjunto de los números racionales, muy similar al del L. T. 1982 $Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$. En la mayoría de estas explicaciones se acompaña de un Diagrama de Venn.

Las **transformaciones** en la representación se suscitan principalmente al interior del registro simbólico, siendo muy escaso entre los gráficos. Las transformaciones de tipo simbólico explican la equivalencia representacional del par ordenado (1, 2) con $\frac{1}{2}$ como representantes del número racional "un medio". Otras transformaciones son: la simplificación, ampliación de fracciones, conversión de fracción impropia en número mixto, manipulación de los signos (+ y -) del numerador y denominador, aplicación de la regla "producto en cruz" para establecer la equivalencia de fracciones y la relación de orden, efectuar el cociente indicado, construcción de una clase de equivalencia etiquetado por su representante canónico, como se puede observar el L. T. 1994. Dentro del registro simbólico algebraico, se resuelven ecuaciones que revelen la necesidad de extender el conjunto de los números enteros y justificar la creación del conjunto de las fracciones. Las representaciones algebraicas se utilizan esencialmente para expresar proposiciones generales, tales como, "Se llama fracción a todo par ordenado (a, b) de números enteros, escrito en la forma $\frac{a}{b}$, y en el cual es b≠0." L. T. 1990.

Las **conversiones**, como un proceso cognitivo, son una actividad muy utilizada en el desarrollo del concepto de número racional. Las conversiones más frecuentes que se utilizan son las de simbólica numérica fraccional a pictórica continua y viceversa. De simbólica numérica fraccional a verbal, como lectura de la fracción. Es notable, en este período, la conversión bidirecional entre el registro simbólico numérico y grafico en la recta numérica, para eso primero se establece un punto de referencia ***r*** donde se ubica el cero (***0***), segmentos congruentes, subdivisión de segmentos congruentes y ubicación de las fracciones hasta establecer **clases de equivalencia**. Otras conversiones son las establecidas entre el registro simbólica numérica fraccional y diagrama de Venn, simbólica algebraica a simbólica numérica, gráfico pictórico a tabular, del diagrama conjuntista a la forma extensiva del conjunto como la mostrada en el (L. T. 1976-B).

4.4.3.3 Durante el período de introducción del constructivismo

Al igual que en el período anterior las representaciones más usuales son la simbólica numérica, algebraica y verbal. Además en este período se presta especial énfasis al registro conjuntista del tipo $Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$, en el que se expone la naturaleza del conjunto de los números racionales, además se explica que sus elementos son números enteros, con $b \neq 0$.

Las transformaciones realizadas al interior de los registros simbólicos son: las realizadas para generar fracciones equivalentes por simplificación y ampliación, transformación de fracciones impropias en números mixtos, regla de la *'multiplicación en cruz'*, realización del cociente indicado, transformaciones de representación fraccional a porcentual, construcción de clases de equivalencia, aplicación de la fracción como operador, manipulación de los signos (+ y -) del numerador y denominador. Son algunas de las transformaciones que se encontraron, tal como se puede constatar en las tablas adjuntas.

También, se han encontrado transformaciones al interior de las representaciones pictóricas, como en el L. T. 1997, utilizadas para ilustrar fracciones equivalencias y su correspondiente gráfico de la simplificación y ampliación de fracciones a través de particiones reiteradas del pictograma. Los pictogramas también sirven para realizar comparaciones y establecer el orden de fracciones.

El **proceso de conversión** de una representación a otra es una actividad poco trabajada porque se cree que es suficiente el registro simbólico y se prioriza en él las transformaciones, como se ha descrito en el párrafo anterior. Se ha encontrado situaciones muy escasas de conversión utilizadas como recursos didácticos en los libros de texto. Al igual que en el período anterior las conversiones convencionales son las siguientes:

- De simbólica numérica fraccional a pictórica y viceversa; esta conversión es la más utilizada. El pictograma, en la mayoría de las veces, transmite el significado parte-todo del numero racional y lo etiqueta con un registro fraccional. En la página 74 del L.T. 1997, se exhibe la conversión de simbólica fraccional en pictórica con la finalidad de establecer la relación de orden de dos números racionales.

- Conversiones recíprocas de simbólica numérica fraccional a gráfica en la recta numérica. En el L.T. 2003-B se aprecia a través de interrogantes "Es posible señalar el siguiente y el anterior de un número racional?, un mismo punto en la recta numérica ¿puede ser representado por varias fracciones equivalentes?, ¿Forman estas fracciones equivalentes una clase de equivalencia o lo que es lo mismo: un número racional?" (p. 87) y representaciones gráficas en la recta numérica y registros simbólicos fraccionales se pretende introducir la noción de densidad del conjunto de los números enteros, clase de equivalencia como número racional.
- De simbólica algebraica en simbólica numérica y viceversa: las expresiones algebraicas son manipuladas esencialmente para explicar proposiciones generales a través de ejemplificaciones de fracciones numérica.
- De verbal a simbólica numérica y viceversa.

4.4.4 Ilustraciones en la Construcción del Número Racional

En este numeral se analiza el uso de las gráficas en el discurso matemático de los libros de texto. Del análisis se desprende un marco de referencia que permite entender el uso de las gráficas.

Un problema es el reconocimiento que en los niveles de educación secundaria y superior se privilegia las representaciones simbólicas tanto numéricas como algebraicas. Esto contradice resultados teóricos en el sentido (Duval, 1995) que la comprensión del conocimiento matemático tiene como requisito la coordinación de al menos dos tipos de representaciones externas (gráficas y simbólicas).

El discurso matemático de los libros de texto trasmite la idea que el conocimiento matemático es acabado y su tratamiento didáctico como un acto repetitivo. Este enfoque limita los procesos comunicativos que se basan esencialmente en las representaciones simbólicas.

La situación descrita, implica entender cómo se utilizan los gráficos en el discurso matemático, es decir, conocer su papel didáctico en la comunicación de significados.

En el análisis preliminar de los libros de texto, se logra categorizar los usos de las ilustraciones con relación a los significados en la explicación del concepto del número racional.

La cuestión que orienta el análisis es:

¿Cuáles son los tipos de gráficos y sus usos? Para proponer respuestas, conviene establecer criterios, identificar los tipos de gráficos y describir el propósito de su uso. Estos dos aspectos darán cuenta de la naturaleza del uso de los gráficos en los libros de texto.

4.4.4.1 Identificación de los tipos de gráficos

La selección de las ilustraciones representativas que transmiten significados del número racional, revela que los tipos de representación gráficos que están presentes en los libros de texto son:

- Representación pictórica
- Representación gráfica en la recta numérica.
- Segmento de recta
- Representación en el sistema de ejes coordenados
- Diagramas conjuntistas
- Diagrama sagital
- Organizadores visuales.
- Tablas.
- Viñetas
- Figuras geométricas

Las representaciones pictóricas que se encuentran en la mayoría de textos, son los objetos continuos y discretos que transmiten esencialmente el significado parte-todo. Sólo en dos textos se observó el uso de pictogramas continuos, para ilustrar el significado de cociente, L.T. 2000-A y L.T. 1997.

En los L.T. 2000-A y L.T. 1997, ambos de autores colectivos, se encontró el uso de representaciones pictóricas continuas para explicar el significado de cociente como parte de la necesidad de repartir dos objetos continuos (pizzas) entre dos niños.

Usualmente, estas representaciones pictóricas están acompañadas de su interpretación simbólica numérica respectiva. Las conversiones entre estos registros de representación son bi-direccionales. Un tercer elemento presente en estas ilustraciones son las representaciones verbales que explican el significado de la fracción. Un ejemplo de este tipo de tratamiento representacional es la ilustración del L.T. 2005. Sin embargo, también se encontró casos en que el autor se limita a presentar el pictograma y la fracción que le corresponde sin mayores explicaciones sobre su lectura, como una fracción que corresponde al significado parte-todo, L.T. 1974.

Es más frecuente el uso de representaciones de objetos continuos que discretos, así, de los veinte libros de texto revisados, solo dos usan como recurso comunicativo los pictogramas de objetos discretos. El L.T. 2003-D lo usa para ilustrar la comparación de fracciones con denominador común, inmerso en el significado parte-todo. Sólo el L.T. 1976-A utiliza representaciones pictóricas discretas para explicar el significado de razón; en él se realiza comparaciones entre el número de niños y el número de niñas que pertenecen a una clase de estudio. Lo interesante del tratamiento es la transformación que se realiza al interior de las representaciones gráficas y simbólicas. En esta ilustración se percibe los proceso de tratamiento y conversión simultáneamente.

De la descripción anterior se puede concluir que en los libros de texto se usan con más facilidad y frecuencia pictogramas de objetos continuos, para transmitir el significado parte-todo; en tanto, es poco frecuente el uso de la representación discreta, que puede servir para ilustrar el significado parte-todo o razón. Además, estos pictogramas son traducidos a su representación simbólica numérica y representación verbal.

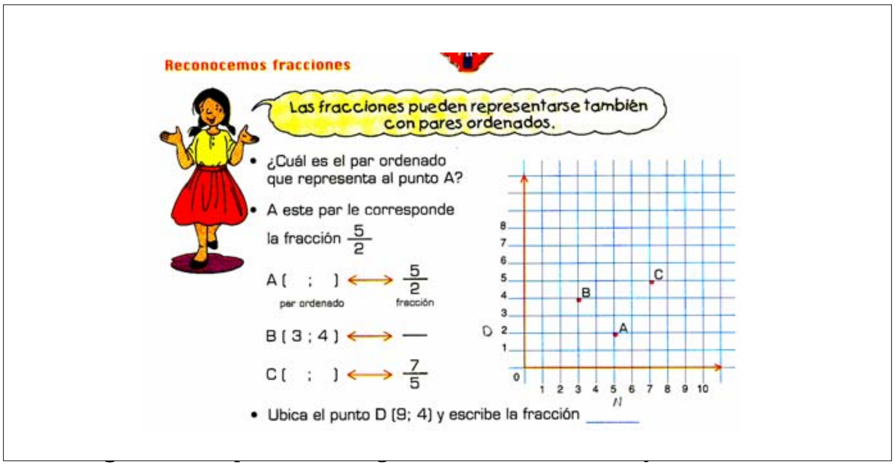
La mayoría de libros de texto utilizan las **representaciones gráficas en la recta numérica** para relacionar un punto de la recta con una fracción, pero no explican que a cada punto corresponde un número racional. El uso que se hace de este recurso visual se limita a la ubicación de un conjunto de fracciones, positivas y negativas en la recta numérica (L.T. 1993). También es utilizado para visualizar la posibilidad de representar números entre cero y uno, como lo explicita el L.T. 1976-A. En el marco del enfoque de la matemática moderna el L.T. 1975 explica que entre el conjunto de los números racionales y la recta L puede establecerse una función y explica que a cada número racional le corresponde un punto y, solo uno, en la recta.

Es evidente que la recta numérica sirve para representar números racionales y que dentro de ella está el significado parte-todo continuo. Una limitante en el uso de esta representación es su no-aprovechamiento para el estudio de otras nociones matemáticas, como orden, equivalencia y densidad del número racional. Al igual que el caso anterior, estos gráficos siempre están acompañados de los símbolos numéricos que representan fracciones.

Una gráfica análoga a la anterior son los **segmentos de recta** que en algunos libros como L.T. 2000-A, L.T. 1963-A y L-T. 1963-B son utilizados para transmitir el significado parte-todo, (los dos últimos) como resultado de dividir el segmento en partes congruentes y asignar a cada parte del segmento una fracción. Un caso muy particular es el L.T. 2000-A, que utiliza los segmentos para explicar el significado de medida del número racional. Dado un segmento de medida *u* se pide indicar la medida de otro segmento *a*, acción que se realiza subdividiendo *a* y relacionándolo con la medida de *u*.

A pesar que la representación de los números racionales en un **sistema de ejes coordenado**s tiene múltiples ventajas, éste no es utilizado por los autores de libros de texto. Esta representación es útil para estudiar la relación de orden, equivalencia y numerabilidad de los números racionales, como lo recomienda (Rojo, 1986) y el

Fascículo Autointructivo 5.2 del MED 2001. Asimismo, el libro de texto del nivel primario “Aprendamos Matemática” de Sexto Grado, postula representar la fracción como par ordenado en un sistema de ejes coordenados como se ilustra en la figura 4.7. Sin embargo, las observaciones revelan que de veinte libros sólo uno, el L.T. 2003-B utiliza esta representación para introducir la noción de fracciones equivalentes.



Las **tablas** que consideramos como un caso especial de representación gráfica, son utilizadas en los libros de texto con una orientación de matemática moderna. El L.T. 1982 utiliza tablas para explicar la generación de clases de equivalencia, como resultado de multiplicar un par ordenado por un número entero, (menos cero); en tanto, el L.T. 1976-B utiliza una tabla para organizar la interpretación parte-todo, traducciones de pictórica parte-todo continuo a simbólica como par ordenado y fracción.

Los **gráficos conjuntistas** son utilizados para puntualizar la inclusión de conjuntos numéricos $(N \subset Z \subset Q)$ (L.T. 1975 y L.T. 2003-B); o en su defecto, para indicar que el conjunto de los números racionales está conformado por los racionales positivos, cero y negativos (L.T. 1990). Estas representaciones están presentes tanto en libros antiguos como en textos actuales. En la década de los setenta, del siglo pasado, tuvo una fuerte presencia la matemática moderna, así por ejemplo, se encontró que en los L.T. 1975 y L.T. 1976-B el diagrama conjuntista representa los números racionales como un conjunto de clases de equivalencia.

Correlativamente a los anteriores se encontró un caso de **representación sagital** para el estudio del significado de operador del número racional (L.T. 2000-A) . En el cual, dado un conjunto de partida de números múltiplos del denominador del operador se asigna otro número que pertenece al conjunto de llegada. Este tipo de diagramas es adecuado para explicar las transformaciones que puede ocasionar el operador; además, el diagrama sugiere, desde ya, la noción de función que está ligado al significado de operador.

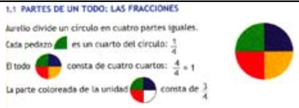
Eventualmente, se encuentra algunas **figuras geométricas** como la mostrada en L.T. 2000-A que representa rectángulos y sus diagonales con el objeto de explicar razones iguales, si bien estas visualizaciones son esporádicas, demuestran su utilidad y oportunidad para relacionar el significado de razón de los numéricos racionales con la geometría.

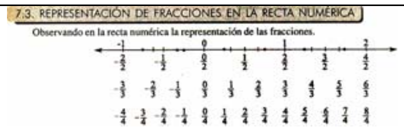
El uso de algunos **organizadores visuales** como los mostrados en el L.T. 1963-B, L.T. 2003-B y L.T. 2003-A. En el primero, se usa un cuadro sinóptico, que explicita la inclusión de los números enteros y "números fraccionarios" en el conjunto de los números racionales. Los dos últimos exhiben lo que se denomina mapa conceptual (L.T.2003-D) o "gráfico relacional" del L.T. 2003-B. Estos pretenden presentar una visión global de la unidad de estudio y establecer relaciones entre las nociones y conceptos que se desarrollan.

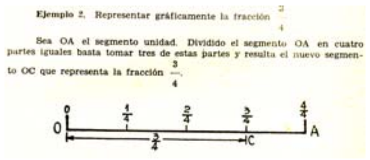
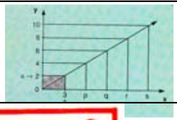
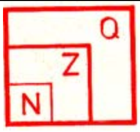
Otro recurso representacional usado en los libros de texto, aunque poco frecuente, son las viñetas. Estos se encontraron en los L.T. 1976-A, L.T. 2003-B, L.T. 2003-D y L.T. 2005. De todos estos, el más relevante es el de L.T. 1976 que a través de una viñeta conjunciona la noción de clase de equivalencia y el significado parte-todo, a través de las representaciones pictóricas, verbal, simbólica y recta numérica. En el texto L.T. 2003-B se usa la viñeta para ilustrar el significado de cociente y la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros, como consecuencia de la imposibilidad de dividir uno entre cuatro.

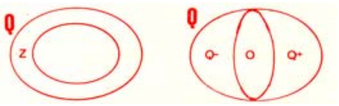
Tabla 4.25

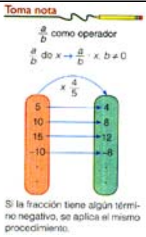
Muestra de Representaciones Gráficas que Ilustran los Significados

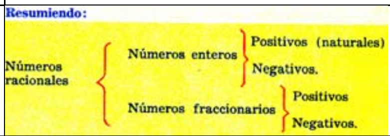
<table>
<tr><th>Tipos de gráficos</th><th>Gráfico</th><th>Significado / noción que transmite</th></tr>
<tr><td>Pictórica</td><td>

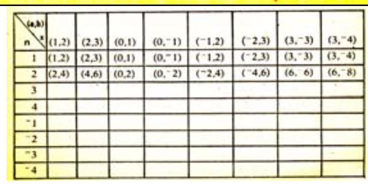
L.T.2005</td><td>Parte-todo continuo</td></tr>
<tr><td>En la recta numérica.</td><td>

L.T.2003-D</td><td>Representación de fracciones equivalentes positivos y negativos en la recta numérica.</td></tr>
<tr><td>Segmento de recta</td><td>L.T.1963-A

</td><td>Significado parte-todo en la recta numérica.</td></tr>
<tr><td>Sistema de ejes coordenados</td><td>
L.T.2003-B</td><td>Clase de equivalencia</td></tr>
<tr><td>Diagramas conjuntistas</td><td>

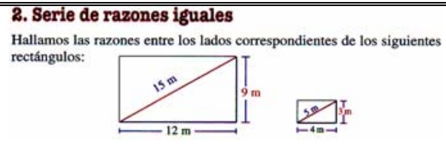


L.T.1992 L.T.1990</td><td>Concepto de conjunto de números racionales y la inclusión de N y Z en Q.</td></tr>
<tr><td>Diagrama sagital</td><td>

L.T. 2000-A</td><td>Significado de operador.</td></tr>
<tr><td>Organizadores visuales</td><td>

L.T.1963-B</td><td>Cuadro sinóptico que define los números racionales.</td></tr>
<tr><td>Tablas</td><td>
<table>
<tr><th>n \ (a,b)</th><th>(1,2)</th><th>(2,3)</th><th>(0,1)</th><th>(0,⁻1)</th><th>(⁻1,2)</th><th>(⁻2,3)</th><th>(3,⁻3)</th><th>(3,⁻4)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>(1,2)</td><td>(2,3)</td><td>(0,1)</td><td>(0,⁻1)</td><td>(⁻1,2)</td><td>(⁻2,3)</td><td>(3,⁻3)</td><td>(3,⁻4)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>(2,4)</td><td>(4,6)</td><td>(0,2)</td><td>(0,⁻2)</td><td>(⁻2,4)</td><td>(⁻4,6)</td><td>(6,⁻6)</td><td>(6,⁻8)</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>⁻1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>⁻2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>⁻3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>⁻4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
L.T.1982</td><td>Tabla que ilustra la clase de equivalencia.</td></tr>
<tr><td>Viñetas</td><td>L.T.1976-A

</td><td>La noción de clase de equivalencia, significado de parte-todo continuo y representación del número racional en la recta numérica.</td></tr>
</table>

Figuras geométricas	 L.T. 2000-A	Significado de razón, que se utiliza para estudiar la semejanza de triángulos.

Conclusión preliminares

En términos generales, se percibe que las ilustraciones se usan esencialmente para presentar la noción de fracción, principalmente en su significado parte-todo. Sin embargo, están presentes otros tipos de ilustraciones pictóricas, como la recta numérica, segmento de recta y esporádicamente los diagramas conjuntistas, sagitales, sistema de ejes coordenados, figuras geométricas, tablas y viñetas; todos ellos ligados a otros significados como operador, razón, medida y cociente. Estos significados no son enfatizados como ocurre con el significado parte-todo.

Como lo explica Duval (1995), en el sistema didáctico las actividades cognitivas de formación y tratamiento son utilizadas con mayor frecuencia y experiencia, en tanto, se descuida la conversión. Este hecho es confirmado en las observaciones de las ilustraciones representativas de los libros de texto. Las conversiones más usuales que hemos podido encontrar son los de gráfica a simbólica, numérica o viceversa, mas no conversiones de otra naturaleza.

El estado de la cuestión permite afirmar que el uso de los gráficos, en los libros de texto sirven para transmitir información sobre el significado de parte-todo y esporádicamente otros significados como se muestra en la figura siguiente.

4.4.5 La fenomenología del Estudio de los Números Racionales

4.4.5.1 Presencia de elementos históricos en el estudio de los significados

Cuando las nociones matemáticas quedan divorciadas de sus orígenes o su génesis histórica, estos se presentan a los estudiantes en los libros de texto de forma cerrada; es decir, se oculta que el número racional surgió después de un largo proceso de gestación, en la que diversas culturas de la humanidad han contribuido en su desarrollo. Culturas como la mesopotámica, egipcia, griega, árabe se enfrentaron a diversos problemas, prácticos o teóricos cuya solución generaron diversos conceptos que hoy utilizamos y las comprendemos.

Al presentar el concepto de números racionales como una estructura algebraica, un campo, o el conjunto de clases de equivalencia de forma cerrada y acabada se oculta al estudiante el verdadero proceso de creación histórica y científica del concepto. Se esconde que el significado de medida del número racional es la fuente de su origen, manifestado ya en la antigüedad y que los griegos concebían la razón como la comparación de un par de números enteros.

Eminentes matemáticos educadores como Felix Klein o Puig Adam, consideran que la revisión histórica de los conceptos matemáticos mejora la calidad de la educación matemática. La búsqueda de las raíces históricas de un concepto matemático, no sólo contribuye a su comprensión sino también a sus explicaciones, a su fenomenología que es olvidada, tal como se ha podido constatar en el análisis de los libros de texto (Citado por Alcina, 2000).

El estilo cerrado y acabado de presentación de los números racionales en los libros de texto, especialmente del período B, reflejan el divorcio de su génesis histórica y escamotean el proceso histórico. Esto explica la marginalidad de los significados de medida o razón en los libros de texto al momento de construir el concepto de número racional. Esta presentación pulida y deductiva de la noción matemática no ayuda a la comprensión, sino más bien, induce al estudiante a renunciar el entendimiento y optan por la memorización a fuerza de repetición, en la resolución de una cantidad considerable de ejercicios repetitivos, que se asigna al final de cada sección de estudio, como se constató en la revisión de los libros de texto.

La secuencia de exposición de los conceptos y actividades, en el libros de texto, la definición del teorema, a veces, la prueba o explicación a través de ejemplos y proposición de ejercicios, refleja el olvido de la génesis histórica de las nociones matemáticas e induce al estudiante a tener una visión artificial y estereotipada de la matemática. La presentación acabada del conocimiento matemático impide revisar y reeditar la superación de los obstáculos que el conocimiento matemático sopesó a través de su historia.

Los síntomas arriba señalados se ven reflejados en los libros de texto en la observación y análisis de la presentación de los números racionales, evidenciando un olvido casi total de los elementos históricos. Así por ejemplo, de los veinte libros de texto, catorce no los registran, dos se limitan a presentar datos biográficos de matemáticos célebres sin relación alguna con las fracciones; en tanto que, cuatro textos hacen alusión a hechos históricos relacionados a la fracción continua, decimales, división de fracciones, origen etimológico de la palabra ‘*quotiente*’, pero de manera tangencial, sin ser aprovechado como recurso didáctico.

Cuando se reclama el uso didáctico de la historia de los números racionales, se exige que en los textos quede primeramente reflejado lo que Chevallard (1991) postula, la transposición didáctica del saber histórico institucionalizado como un proceso de reconstrucción de la noción matemática, reeditando cada momento histórico, adaptando y transformándolo para hacer del saber académico una materia académica más digerible que se cristalice en un saber aprender y enseñar.

4.4.5.2 Los números racionales en la vida cotidiana

Los contextos que se reclaman ser de la vida cotidiana deben ser reales en el sentido de tratar situaciones que realmente se producen en la vida diaria del escolar. La cuestión es, si los libros de texto proponen situaciones contextuales efectivamente realistas. Se deberá responder a la cuestión ¿estos contextos son adecuados para que los alumnos los empleen en las clases de matemática?

Se encontró en los libros de texto que el empleo de los contextos de la vida cotidiana se efectúa sólo hasta después de haber enseñado las matemáticas formales; primero, se aprende matemática abstracta y formal sin utilizar el contexto y luego se aplica estas matemáticas a la resolución de problemas medianamente contextualizados que en algunos textos se denominan “problemas de aplicación” al final de un capítulo o unidad de aprendizaje y que usualmente son encargados al estudiante como una actividad de extensión. A este enfoque se le llama de arriba abajo según Van R. (1997 p.13), (citado por Alsina, 2000).

Las deficiencias en la utilización de la matemática contextual o su evasión provocan en el estudiante una visión estereotipada de la matemática que no contribuye a comprender que las matemáticas son útiles y necesarias para ejercer su ciudadanía.

En el discurso del número racional, aparentemente existe una distancia entre lo que se aprende y los usos de lo aprendido. Esto se evidencia cuando no se logra hacer patente la potencialidad utilitaria que los números racionales tienen para ser aplicado en la vida cotidiana. Se observa que una cosa es explicar muy bien la necesidad de extender el conjunto de los números enteros, generando las fracciones como tema matemático, haciendo énfasis en las relaciones de equivalencia, clase de equivalencia, etc..., pero otra cosa muy distinta es identificar y analizar los usos sociales de los números racionales en la actividad comercial, actividades de medición en los talleres de carpintería, en la prensa escrita, etc... Esta realidad cotidiana demanda a los autores de los libros de textos prestar más atención al estudio de las fracciones relacionándolo con la vida real, a fin de desarrollar un "discurso más ínter disciplinado donde contexto y matemática tengan que reajustarse" (Alsina, 2000). Esta forma de presentar los contenidos temáticos requiere trabajar los aspectos de modelización de los fenómenos sociales, psicológicos y naturales, es decir, de matematizar la realidad cotidiana, características que no se encontraron en los veinte libros de texto analizados.

La evaluación de la presentación del concepto de número racional y el uso de sus significados , en los libros de texto, nos muestra que, por ejemplo, en el período A las aplicaciones del número racional a la vida cotidiana se limitan a presentar situaciones que envuelven 'partes alícuotas' de la naranja que representa la unidad. En tanto que en el período B el abordaje de los números racionales es totalmente descontextualizado como se constata en los L.T. 1996, L.T. 1992, L.T. 1982, L.T. 1976-A y L.T. 1976-B. Sin embargo, en algunos casos se apela a situaciones de tipo "Dividir 5 panes entre 6 personas" (L.T. 1990) que se utilizan para justificar la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros y generar los números racionales. Cuando tienen la necesidad de explicar la fracción en su significado parte-todo, recurren a representaciones pictóricas descontextualizadas, como por ejemplo, un círculo, una superficie cuadrada, etc.

En el período C se encontró un leve progreso en el sentido de valorar situaciones reales cotidianas para el estudio de los números racionales, así, se encontró situaciones del tipo “comprar medio kilogramo de azúcar”, “son las ocho y cuarto de la mañana” (L.T. 2005) o secciones completas como “Las matemáticas... de todos los días” (L.T. 2003-B) o “matemáticas en la práctica” (L.T. 1997) que revelan una mayor conciencia de la importancia de contextualizar los contenidos matemáticos para lograr mayor comprensión.

4.4.6 Elementos Metodológicos en los Libros de Texto

4.4.6.1 Período A

Estos textos, desarrollan una enseñanza basada en la formulación de ejemplos, enunciados de conceptos y proposición de ejercicios que tienen el objetivo de comprobar la capacidad repetitiva de conceptos a través de interrogantes abiertas como “¿qué es una fracción?” (L.T. 1963-A) concepto que ya fue enunciado en el libro con anterioridad. También el libro de texto L.T. 1963-B propone interrogantes como “¿qué indica el numerador (y denominador) de una fracción” o “¿qué son los números racionales?”, cuando en todo el texto no se ha desarrollado los elementos teórico-conceptuales y los significados necesarios para poder conceptuar el número racional.

4.4.6.2 Período B

El objetivo que se propone alcanzar en este período, es enfatizar en los conceptos básicos y fundamentales recurriendo a la ejemplificación y a razonamientos lógicos, como único camino para alcanzar el aprendizaje. La proposición de múltiples ejercicios resueltos y propuestos revelan la intención de adiestrar al estudiante en el cálculo operativo. La ruta seguida para definir el conjunto de los números racionales descubre el interés de los autores por presentar de forma “rigurosa” y descontextualizada los significados, apelando a definiciones de “relación de equivalencia, clase de equivalencia”, “conjunto de todas las clases de equivalencias” que tienen el propósito de presentar una figura formalizada, rigurosa, deductiva y acabada, como corresponde a una visión estereotipada de la matemática moderna.

Como se percibe en la descripción del libro de texto la estrategia es netamente deductiva, primero se enuncia algunas generalidades y posteriormente se aplica en ejemplos, ejercicios desarrollados, y finalmente, se propone ejercicios con la intención de reforzar el aprendizaje del enunciado general. Este enfoque corresponde a una concepción conductista donde el recurso básico es el estímulo refuerzo L.T.1992.

La unidad temática de los números racionales usualmente está organizada de la siguiente manera: una síntesis teórica, un grupo de ejercicios ‘tipo’ resueltos, cuestionarios y ejercicios propuestos. En el L.T. 1975 se recomienda al estudiante, como estrategia de aprendizaje, enfatizar en la necesidad de “practicar” con lápiz y papel muchos problemas que lo llevarán a “aprender haciendo” y superar la lectura de texto como si se tratara de un relato literario. El desarrollo del concepto de fracción y número racional tiene una secuencia que corresponde a un estilo propio de la matemática moderna; trata de construir el concepto de número racional en base a un conjunto de definiciones, propiedades (reflexiva, simétrica y transitiva de la equivalencia de fracciones) clase de equivalencia, partición de una clase de equivalencia y hasta definir la fracción, como “todo par ordenado (a, b) $\in ZxZ^*$, donde *a* se llama numerador y *b* se llama denominador” (L.T. 1976-B p. 70).

Consecuentes con la fundamentación psicológica del conductismo, los textos correspondientes a la perspectiva de la matemática moderna, conciben el aprendizaje como el cambio observable de la conducta que puede ser medido. Se entiende el aprendizaje como producto de una relación “estímulo-respuesta”. Estas ideas conductistas pueden aplicarse con relativo éxito en el aprendizaje memorístico a través de repeticiones de refuerzo y estímulos, sin embargo, la resolución repetitiva de ejercicios similares no garantiza una comprensión de las nociones matemáticas, sino, solo la ejecución de procedimientos matemáticos, como por ejemplo, los algoritmos, de las operaciones básicas con fracciones; consecuentemente, el aprendizaje de conceptos y algoritmos no son fácilmente traspasables, ni aplicables a situaciones problemáticas que rebasan los ejercicios 'tipos' que se resuelven como parte del refuerzo. En la cantidad de ejercicios radica, tan solo, el objetivo de incrementar la frecuencia de la conducta que se pretende consolidar, afianzando la conducta deseada, mas no la comprensión de la noción matemática.

Los enunciados de ejercicios más usuales son:

- Cuestiones abiertas ¿Es lo mismo fracción que número racional? ¿Qué es una fracción? ¿Qué es un número racional? ¿Cuándo se dice que una relación definida en un conjunto es de equivalencia?
- Evaluar la verdad-falsedad de las proposiciones dadas.
- Halle el valor de x (resolución de ecuaciones)
- Determinar la equivalencia y orden de fracciones por medio de la regla del 'aspa'.
- Ejercicios de simplificación de fracciones.
- Escribir fracciones equivalentes.
- Ejercicios que refuerzan la noción de clase de equivalencia

4.4.6.3 Período C

El tratamiento metodológico de las nociones matemáticas es similar al período anterior, sin embargo, por corresponder a un lapso de transición de un programa curricular por objetivos conductuales a una propuesta de diseño curricular por competencia y capacidades y la reestructuración de los contenidos desde de un enfoque disciplinar hacia uno por áreas curriculares, en correspondencia con esta situación los autores de texto se ven en la necesidad de adecuar sus textos a ambos enfoques, tal es así que el LT. 2003-C pretende 'integrar dos programas curriculares, uno tradicional y otro innovado'. Así mismo, los libros de texto de esta generación cargan la cruz de la preparación pre universitaria, así en el L.T. 2003-A. se estructura su presentación para satisfacer las demandas de la instrucción pre universitaria basado en la automatización de algoritmos y memorización de fórmulas.

La estructura de la unidad temática está organizada en las siguientes partes: entrada y motivación, sección de conocimientos previos, momento básico, ejercicios resueltos y propuestos, momento de repaso, extensión y un momento de evaluación tal como lo presenta el L.T. 2000-A. Por otro lado, es interesante observar que algunos libros de texto presentan organizadores visuales, mapas conceptuales y gráficos relacionados como lo muestra el L.T. 2003-B, influenciados por los aportes teóricos de Novak y Govin (1984).

4.5 CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DEL NÚMERO RACIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTO

La noción de configuración epistémica como herramienta para el análisis de libros de texto matemático desarrollado por Font y Godino (2007), Ramos y Font (2006) proponen para el análisis una ontología amplia formada por los elementos: a) lenguaje, b) situaciones-problema, c) conceptos, d) procedimientos-técnicas, e)proposiciones, propiedades, teoremas y, finalmente f) argumentaciones. Este modelo teórico nos servirá para esbozar la anatomía del texto matemático referente al uso de los significados de la fracción en el desarrollo del número racional.

Luego del análisis realizado en los numerales anteriores, en el que se percibe tres períodos denominados. a) de la “Matemática Tradicional”, b) de orientación conductista de la “Matemática Moderna” y c) Matemática dentro de la coyuntura de “Introducción del Constructivismo”, claramente diferenciados entre los años 1963 al 2005 en los libros de texto de matemática de primero y segundo grados editados dentro del sistema educativo peruano; será oportuno ajustar el modelo de Font y Godino para describir las características antológicas de la noción matemática “Número Racional” y sus significados o interpretaciones asociados a la exposición del concepto de fracción, número racional y conjunto de números racionales. Concordados al modelo de nuestro estudio, distinguimos dos configuraciones epistémicas: primero, lo denominamos configuración epistémico formalista del enfoque conductista de la "Matemática Moderna" asociada al significado del número racional; y segundo, configuración epistémico empirista del enfoque coyuntural "Introducción del Constructivismo" asociada al significado del número racional.

4.5.1 Configuración Epistémico Formalista del Enfoque Conductista de la "Matemática Moderna" Asociada al Significado del Número Racional

El enfoque conductista de la Matemática Moderna introduce el número racional desde la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros, por ser no cerrada respecto a la división, luego, estructura un corpus teórico de la relación de equivalencia, clase de equivalencia, sus propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva, conjunto de los números racionales, etc. Este enfoque utiliza básicamente el lenguaje conjuntista, desde una perspectiva deductiva, rigurosa, con la intención de presentar las nociones matemáticas de forma precisa, sin lugar a ambigüedades en sus definiciones, teoremas, propiedades o técnicas y demás proposiciones generales; que luego son aplicadas a situaciones particulares (ejercicios).

El concepto de fracción y número racional se presenta de manera descontextualizada, pues, las pocas situaciones problema o ejemplos que se presentan sirven para ilustrar y explicar la definición. Con la intención de reforzar las definiciones se propone al final de la unidad temática una batería de ejercicios de cálculo y cuestiones abiertas, como por ejemplo ¿qué son los números racionales? Las situaciones problema tienen la finalidad de concretar los conceptos matemáticos a manera de colofón.

El enfoque metodológico es mimético, se propone ejemplos que luego el estudiante deberá imitar en la resolución de ejercicios similares descontextualizados, limitando al estudiante a enfrentar situaciones nuevas que involucren fracciones o extienda estas nociones a otros ámbitos de la matemática escolar. Véase la figura 4.8.

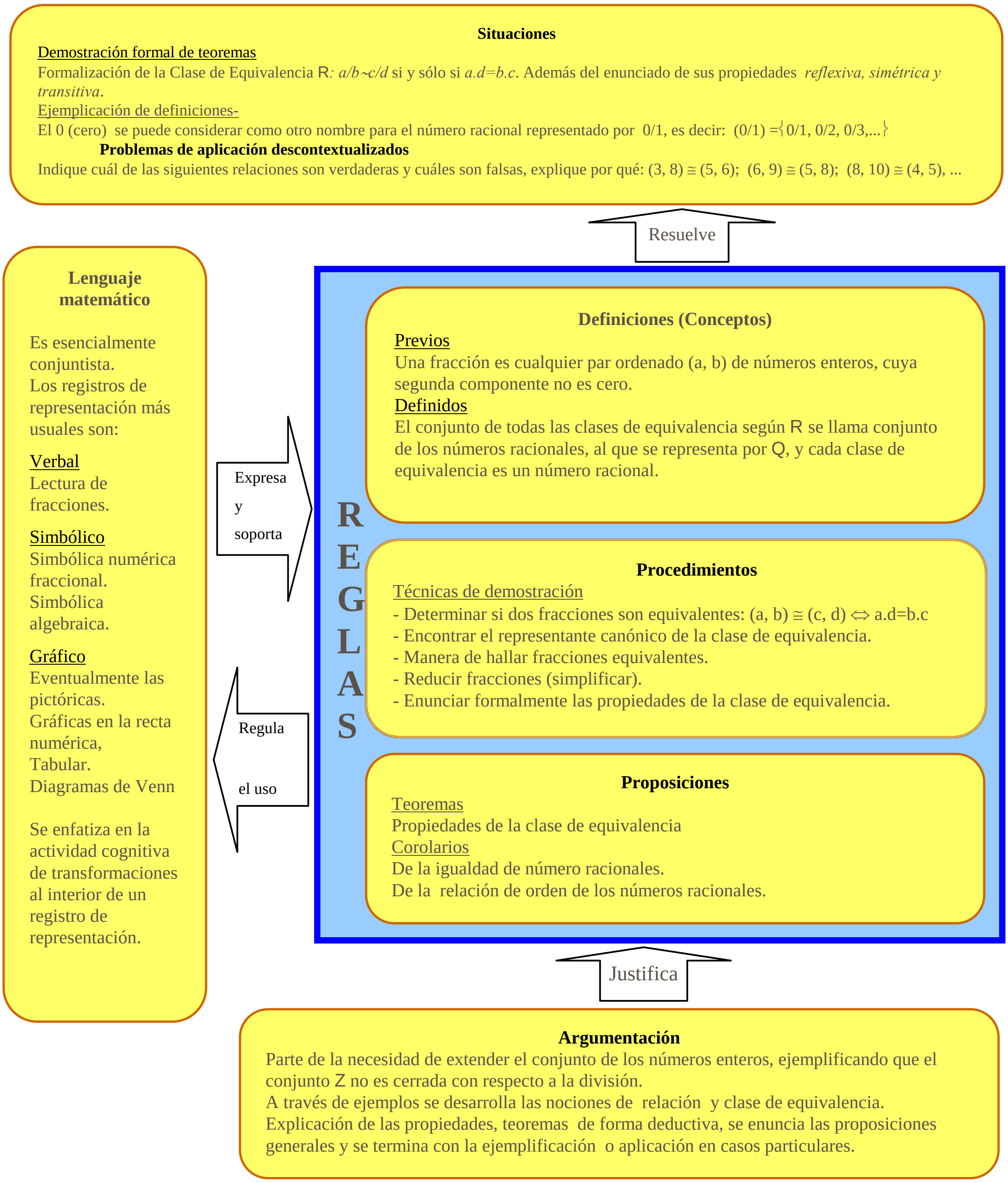


Figura 4.8 Configuración Epistémico Formalista Asociada al Significado del Número Racional

4.5.2 Configuración Epistémico Empirista del Enfoque "Introducción del Constructivismo" Asociada al Significado del Número Racional

Se considera la configuración epistémica empirista como una alternativa a la configuración epistémica formalista, ésta permite abordar nociones matemáticas, principalmente las fracciones como representación. El conjunto de los números racionales de forma contextualizada, intuitiva y realista presupone una concepción empirista de la matemática. Es una gnoseología según la cual el conocimiento se halla fundado en la experiencia, en contraposición al racionalismo. Además es intuitivo, porque el conocimiento se adquiere, es captado por el entendimiento sin necesidad de un razonamiento deductivo formal. Una concepción que considera que las matemáticas son (o se pueden enseñar) como generalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que supone que al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales, Font y Godino (2007), Ramós y Font (2006). En este enfoque se da un papel preponderante a las situación-problema extra matemáticos.

La configuración epistémica empirista de los libros de texto correspondientes al período C, comportan algunas situaciones problema contextualizados a la vida cotidiana, como el fraccionamiento y reparto de objetos regulares (pizza, torta,..) dentro del marco del significado parte-todo, además se explicitan los significados de la fracción como representante notable del número racional: parte-todo, cociente, razón, operador y medida, tal como se puede encontrar en los libros de texto (L.T. 2000-A) y (L.T. 1997). Es notorio el uso de una mayor variedad de registros de representación relacionados a sus actividades cognitivas como la conformación de representaciones, transformación y conversión.

La introducción de la noción número racional tiene la siguiente estructura:

a) Problemas introductorios contextualizados de las fracciones, centrados en el significado parte-todo.

b) Desarrollo de la unidad temática con problemas contextualizados para la construcción del concepto de número racional, seguido de aplicaciones intercaladas.
c) Problemas contextualizados de consolidación, propuestos al final del tema.

Las unidades temáticas de los libros de texto de la muestra de estudio, usualmente tienen la estructura siguiente: una visión global del contenido utilizando un gráfico relacional de conceptos o mapa conceptual, exposición de conceptos, ejemplificaciones, acompañado de actividades básicas; y simultáneamente, se acompaña viñetas ilustrativas que explican las nociones centrales o llamadas de atención en los márgenes y concluye con actividades que tienen la finalidad de ampliar los conceptos y procedimientos. En algunos libros presentan una sección a la que suelen llamar actividades significativas que claramente se refieren a situaciones o problemas contextualizados. Es el caso del libro de texto 2003-B, el cual es un ejemplo de este tipo de tratamiento metodológico; así mismo, éste termina con una sección de ejercicios y problemas propuestos que tienen el propósito de consolidar los aprendizajes logrados.

El concepto de número racional se generaliza a partir de diferentes situaciones problemáticas que involucran los diferentes significados del número racional. No se necesitan conceptos previos conjuntistas (por ejemplo, inclusión, clase de equivalencia, etc.), no se insiste en la enunciación de teoremas, lemas, axiomas en forma de enunciados generales, sino más bien, propiedades. Se introducen mayor variedad de registros de representación (gráficas pictóricas, viñetas, en la recta numérica, en el sistema de ejes coordenados, simbólica numérica fraccional, simbólica algebraica, verbal, además de organizadores visuales) y se proponen actividades de traducción y conversión.

La metodología que se refleja en los libros de texto de esta configuración epistémica se inicia con situaciones problema contextualizados y a través del estudio de estas situaciones problema se construye el concepto de número racional. Estos conceptos se relacionan y organizan para ser, primero, aplicados a ejercicios y después ser utilizados en la resolución de problemas contextualizados más complejos. El tipo de argumentación que se utiliza es de tipo inductivo y representacional. La argumentación deductiva es casi inexistente. Véase la figura 4.9.

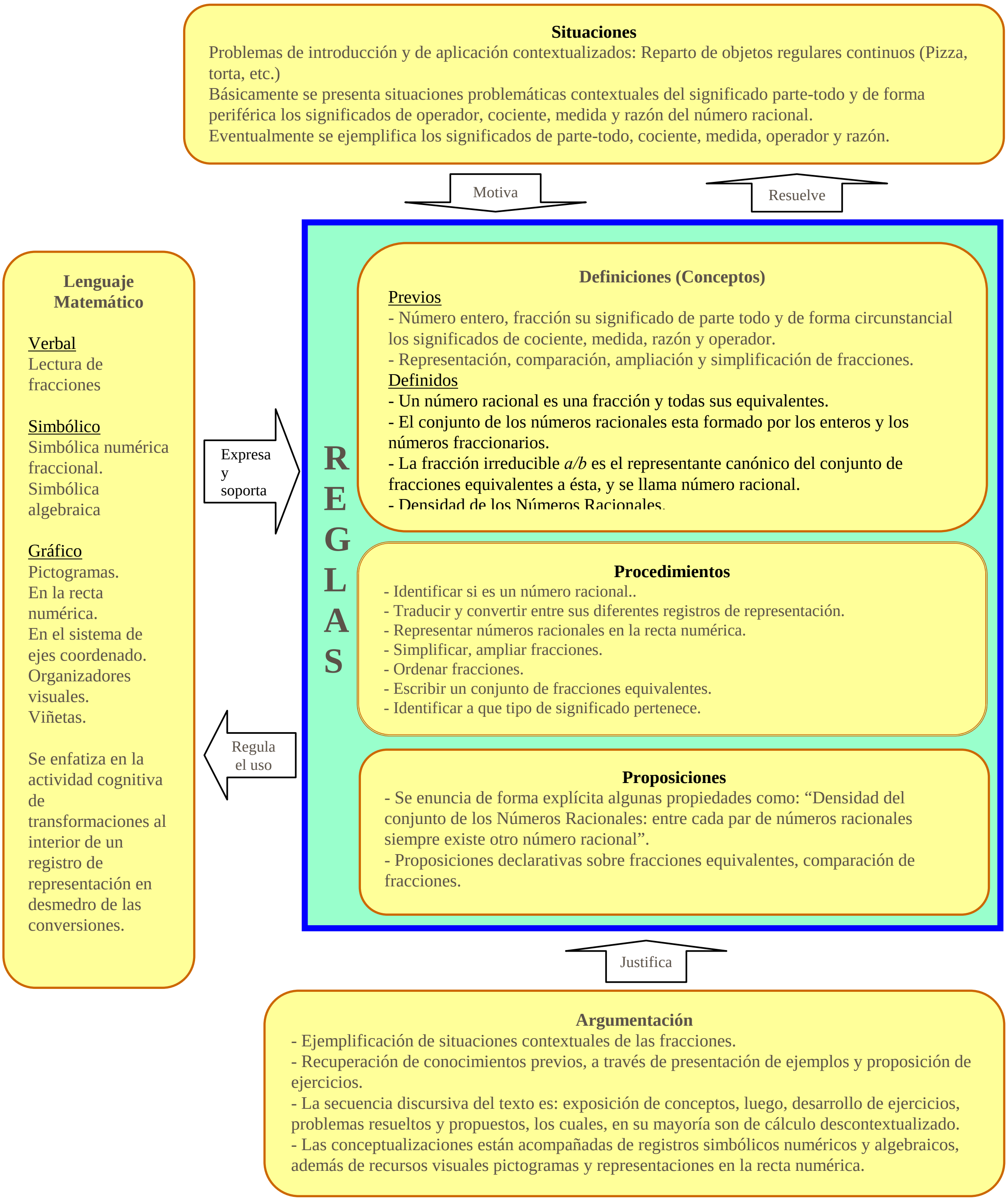


Figura 4.9 Configuración Epistémico Empirista Asociada al Significado del Número Racional

CAPÍTULO V

EXPLORACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS DEL NÚMERO RACIONAL

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se realiza una aproximación empírica a la evaluación de los significados del número racional que posee el estudiante. Se tiene como núcleo representacional las fracciones. En torno a este parámetro se estudia el dominio de los demás sistemas de representación. En un primer instancia se presenta la exposición del propósito del estudio, caracterización de la exploración, una categorización de las tareas. El capítulo está organizado en torno a tres aspectos de atención; primero, un estudio de las repuestas a las situaciones problemáticas propuestas, comparando las dificultades relativas a la interpretación de los significados, numeral (5.4); segundo, un análisis de los tipos de representaciones que utiliza el estudiante en la resolución de situaciones problemáticas que envuelven significados, numeral (5.5); y tercero, una caracterización de las interferencias entre significados, numeral (5.6). Cada uno de estos aspectos se estudia desde la perspectiva cuantitativa y cualitativa.

5.2 PROPÓSITOS DEL ESTUDIO

El propósito del estudio exploratorio es caracterizar la naturaleza de la comprensión de los significados del número racional que ostentan los estudiantes. Se pretende responder a la interrogante ¿cómo es la comprensión de los significados del número racional de los estudiantes de formación docente?, lo que, implica analizar los tipos de interferencias revelados en la interpretación de los significados cuando se enfrentan a situaciones problemáticas con fracciones; además, también se pretende examinar los registros de representación exteriorizadas por los estudiantes cuando solucionan situaciones problemáticas.

5.3 CARACTERÍSTICAS DE LA EXPLORACIÓN

Junto con los elementos del diseño del estudio empírico, cuyos detalles se recogen en el apartado 3.3 del capítulo III, al cual nos remitimos, en este apartado concretamos los fenómenos específicos que son de interés de nuestra exploración así como los criterios y categorías empleados en el análisis de las respuestas recopiladas y en la interpretación de las mismas en términos de comprensión. Previamente se describe el instrumento utilizado para la recolección de información, en este punto, se formula el objetivo de evaluación de cada situación problemática, se plantea las posibles respuestas correctas e incorrectas, y se hace una estimación del grado de dificultad del ítem.

5.3.1 Tareas

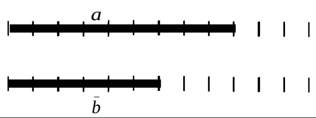
La amplia información disponible en educación matemática sobre el aprendizaje de la fracción y la naturaleza de sus significados propició que la aplicación del procedimiento incluido en el modelo para la determinación y selección de situaciones se redujera en esta ocasión a la consecución de su primera fase. Tras el proceso, las tareas consideradas surgieron de la parte específica de la estructura fenómeno-epistemológica de la fracción correspondiente a aquellas situaciones donde resulta legítimo emplear dicho conocimiento en alguno de sus significados conocidos. Tal como se aprecia en la tabla 5.1, las seis tareas propuestas son ejemplos representativos de situaciones no-exclusivas, propias de los significados básicos:

parte-todo, en sus contextos continuo y discreto, *cociente*, *medida*, *razón* y *operador*, respectivamente. Estas situaciones posibilitan observar el referente teórico de la interferencia entre conocimientos matemáticos y la comprensión de los mismos en función de la disponibilidad a ser empleados.

Las tareas fueron presentadas a la muestra en una sesión de clase ordinaria en forma de cuestionario[1] para cuya resolución individual se dispuso de un tiempo máximo de una hora académica (60 min.) de duración.

Tabla 5.1

Distribución de las Tareas por Significado de la Fracción

Significado de la fracción	**Enunciado**
Parte-todo (continuo)	[S1] *Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?*
Parte-todo (discreto)	[S2] *Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué parte del grupo de amigos son chicos?*
Cociente	[S3] *Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?*
Medida	[S4] *De la observación de la figura. ¿Qué parte de a es b?* 
Razón	[S5] *En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?*
Operador	[S6] *En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?*

Elaboración propia.

[1] La interpretación comprensiva comporta una exigencia comunicativa entre el estudiante y el agente intérprete de su comprensión que se articula fundamentalmente, en el escenario de valoración, examinado a través de registros escritos, diálogos directos o una combinación de ambos. Esta circunstancia trae consigo claras consecuencias metodológicas en lo referente a los instrumentos de recogida de datos a emplear. En la investigación se ha optado por el desempeño individual frente a un cuestionario escrito y el análisis posterior de la información recopilada mediante este método.

5.3.2 Fenómenos de Estudio

La investigación empírica desarrollada se centra fundamentalmente en la observación e interpretación de los siguientes aspectos y fenómenos:

1. En primer lugar, restringiéndonos tan sólo al análisis de las respuestas correctas proporcionadas por los participantes, se pretende establecer un cuadro comparativo de la dificultad relativa manifestada por los diferentes significados de la fracción. Los resultados alcanzados en este caso particular son contrastados con los obtenidos en algunos de los antecedentes descritos en el capítulo II.

2. A continuación, el estudio se dirige sobre los tipos de representaciones externas utilizadas por los estudiantes para cada uno de los distintos significados de la fracción.

3. Finalmente, con la ampliación de los tipos de respuestas para su análisis, se contempla la caracterización del fenómeno de interferencia manifestado en el uso de los significados de la fracción.

Estos aspectos dirigen el análisis de los datos recopilados en la experiencia empírica. En cada caso, los datos reciben un tratamiento inicial cuantitativo, con objeto de garantizar una organización operativa con la que facilitar la identificación de diferencias y posibles regularidades de interés en relación con la comprensión de los significados de la fracción. El análisis cuantitativo se complementa con otro de tipo cualitativo destinado a profundizar en la naturaleza de las respuestas y en las particularidades de las regularidades previamente identificadas.

5.3.3 Análisis e Interpretación de las Respuestas

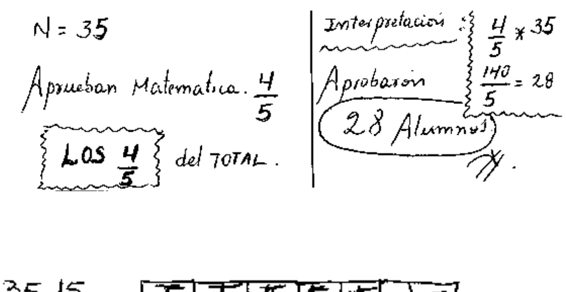
En esta sección hacemos explícita la tipología de respuestas utilizada en la valoración del desempeño manifestado por los estudiantes en cada una de las situaciones que conforman el cuestionario aplicado. A continuación, exponemos el cuadro-resumen de las respuestas proporcionadas por cada alumno, tipificadas en base a las categorías señaladas. Asimismo, se incluyen algunas consideraciones sobre la interpretación de las respuestas en términos de comprensión llevada a cabo de acuerdo con la aproximación teórica adoptada.

5.3.3.1 Categorías

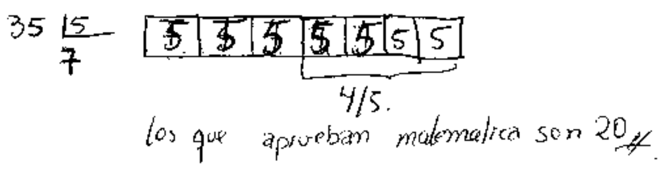
Para la observación e interpretación del fenómeno de interferencia entre significados de la fracción, consideramos apropiado organizar las respuestas dadas por los estudiantes a cada una de las tareas de acuerdo con las siguientes categorías principales:

A. *Empleo propio de la fracción.* Las respuestas manifiestan el vínculo fenómeno-epistemológico entre la situación y el uso de la fracción en su significado oportuno. En esta categoría establecemos la diferencia entre respuesta correcta e incorrecta, útil para afrontar la primera exploración comparativa sobre la dificultad en el uso de los diferentes significados y pertinente para la interpretación de la comprensión según la propuesta presentada. En la categoría del *empleo propio correcto* de la fracción contemplamos la variante referida a aquella respuesta donde se aprecia el uso del significado de fracción esperado conjuntamente con otro que en ningún caso interfiere en el primero. Estableceremos dos sub categorías: *empleo propio correcto* (*EPC*) y *empleo propio incorrecto* (*EPI*). Resultan, por tanto, dos posibilidades de codificación de la respuesta: *EPC* y *EPI*. A continuación presentamos dos muestras de respuestas de este tipo.

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?



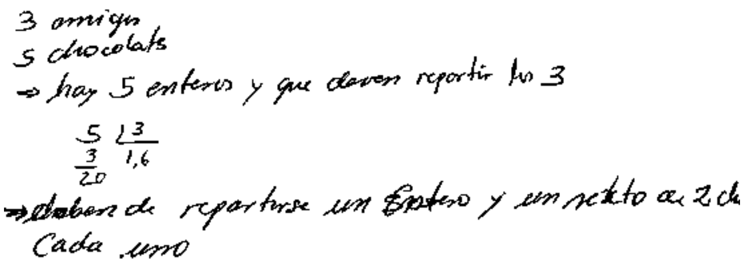
Tipo *EPC*
Estudiante 3-2



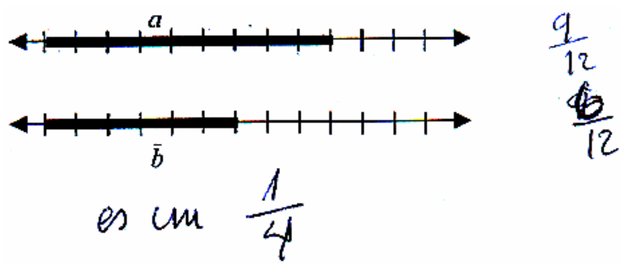
Tipo *EPI*
Estudiante 4-2

Figura 5.1 Ejemplo del empleo propio correcto e incorrecto de la fracción

B. *Interferencia en el uso de la fracción.* Las respuestas ponen de manifiesto el fenómeno de interferencia en el uso de los significados de la fracción por el empleo en la tarea de uno o varios significados determinados en detrimento del considerado propio (*Interferencia Interna o Endógena* II). También se incluyen aquellas respuestas en las que, por emplearse otros conocimientos o simplemente por no aportar información suficiente, no se aprecian muestras suficientemente evidentes de la identificación del vínculo fenómeno-epistemológico existente entre la situación propuesta y la fracción como opción para su resolución en alguno de sus significados (*Interferencia Externa o Exógena* IE). Todo ello con independencia de la adecuación de la solución presentada.



Tipo IE
Estudiante 3-17



Tipo II
Estudiante 5-4

Figura 5.2 Ejemplo de respuesta de interferencia interna y externa.

C. *Respuesta dudosa.* Reúne a aquellas respuestas consideradas dudosas por no manifestar indicios suficientes para poder ser catalogadas dentro de alguna de las dos categorías anteriores[2]. Son respuestas que requieren justificaciones complementarias del resolutor pero que, por el carácter exploratorio del estudio, no se han solicitado para su análisis. En esta categoría incluye las respuestas en blanco. El código que identifica estas respuestas es RD.

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?

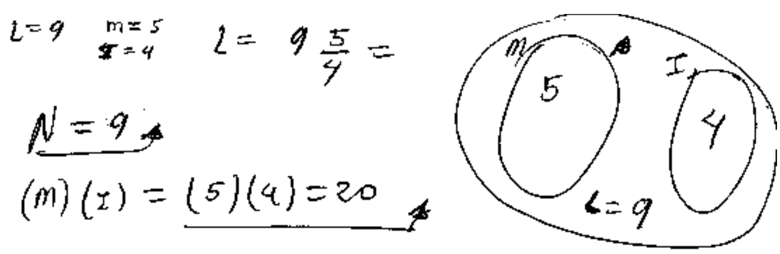


Figura 5.3 Ejemplo de respuesta D proporcionada por los estudiantes 4-10

5.3.3.2. Clasificación de registros de representación

En lo referente a las representaciones se contemplan los tipos básicos de representación siguientes, que se manifiestan en las respuestas dadas en exclusiva o también en conjunto:

Verbal	Simbólica Numérica Fraccional **(SNf)**	Simbólica Numérica Decimal	Simbólica Numérica Porcentual **(SNp)**	Simbólica Algebraica	Pictórica Continua	Pictórica Discreta	Diagrama de Venn
(V)		**(SNd)**		**(SA)**	**(PC)**	**(PD)**	**(DV)**

De este modo, la respuesta de cada alumno a cada situación problemática vendrá codificada por una dupla (***x***,***y***), donde ***x*** = *EPC, EPI, IE, II* o *D* e ***y***=*V, SNf, SNd, SNp, SA, PC, PD* **o** *DV.*

[2] La consideración de esta última categoría de respuestas está justificada por las limitaciones propias de la opción metodológica empleada en la experimentación para el registro de la comunicación establecida entre estudiante y profesor.

En las duplas de la siguiente tabla se identifica el tipo de respuestas y el tipo básico de representación, en el segundo caso se presentan diversas situaciones en las repuestas, tal es así, que en una respuesta se presentan varios registros de representación, razón por la cual se identificaran las más significativas, es decir, las más relevantes en la solución. Por ejemplo, en la solución del alumno 3-20, tabla 5.2 a), el par ordenado sería [IE; (PC, V, SNf)].

5.3.3.3 Respuestas de la muestra

Las tablas 5.2 a), b) y c) muestran, de forma sintetizada, la distribución de los alumnos de la muestra en función de las respuestas proporcionadas y de acuerdo con los criterios, tipos de respuesta y simbolización señalados.

Tabla 5.2 a)

Cuadro de Respuestas Obtenidas por la Muestra $_{Participante}$ ***en el Estudio***

Alumnos		Situaciones					
		Situación1	*Situación2*	*Situación3*	*Situación4*	*Situación5*	*Situación6*
Tercero	3-1	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[II ; (SNf, SA)]	[EPC ; (SA)]	[II ; (SNf)]	[EPC ; (SA)]
	3-2	[IE ; (V, SNp)]	[EPC ; (SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[II; (SNf)]	[EPC ; (SNf)]
	3-3	[EPC ; (SNf)]	[II ; (SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[D ; (----)]	[II ; (SNf)]	[EPC ; (SNf)]
	3-4	[EPI ; (V)]	[EPI ; (V, SNf)]	[EPC ; (SNf, SNd)]	[II ; (SNf)]	[II ; (V, SNf)]	[EPC ; (SNf)]
	3-5	[EPC ; (SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[IE ; (SNd)]	[EPC ; (SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[EPC; (SNf, SNd, SNp)]
	3-6	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPI ; (V, SNf)]	[II; (PC, SNf)]	[EPC ; (SA)]	[II ; (V, SNf)]	[EPC ; (SNf)]
	3-7	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[D ; (SNf, SNa)]	[II ; (PC, SNf)]	[EPI ; (SNf)]	[II ; (SNf)]	[EPC ; (SNf)]
	3-8	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[EPC ; (SNf, SNd)]	[EPC; (SNf, SA)]	[II ; (V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]
	3-9	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]	[EPI ; (SNf)]	[II ; (PC, SNf)]	[II ; (SNf)]	[EPC ; (V)]
	3-10	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[II ; (V, SNf)]	[EPC ; (PC, PD, SNf, SNd)]	[EPI ; (SA)]	[EPI ; (PD, V, SNf)]	[EPI ; (SNf, SNd)]
	3-11	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]	[II ; (PC, SNf, SNd)]	[EPI ; (SNf)]	[II ; (V, SNf)]	[IE ; (SNf, SNd)]
	3-12	[EPC ; (V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]	[EPI ; (V, SNf)]	[EPI ; (SNf)]	[II ; (SNf)]	[D ; (V, SNf)]
	3-13	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[II; (V, SNf)]	[EPC ; (PC, PD, V, SNf, SNd)]	[EPC ; (SNf)]	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[II ; (PC, V, SNf)]
	3-14	[EPC ; (V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]	[EPC ; (PC, PD, SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[II ; (V, SNf)]	[EPC ; (SNf)]
	3-15	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC ; (PC, SNf, SNd)]	[EPC ; (SA)]	[EPI ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]
	3-16	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPI ; (SNf)]	[EPC ; (V, SNf, SNd)]	[IE ; (SNf, SA)]	[II ; (V, SNf)]	[IE ; (SNf)]
	3-17	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (PC, SNf)]	[IE ; (V, SNd)]	[EPC ; (SNf, SA)]	[II ; (PC, V, SNf)]	[II ; (PC, V, SNf)]
	3-18	[EPC; (PC, V, SNf, SNp)]	[EPC ; (SNf)]	[EPI ; (SNf, SNd)]	[EPI ; (SNf, SA)]	[II ; (V, SNf)]	[II ; (V, SNf)]
	3-19	[EPC ; (V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]	[II ; (V, SNf)]	[EPC ; (SNf)]
	3-20	[IE ; (PC, V, SNf)]	[EPI ; (SNf)]	[EPC ; (V, SNf, SNd)]	[EPC ; (V, SNf, SA)]	[II ; (SNf)]	[EPC ; (SNf)]
	3-21	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (PD, SNf)]	[EPC ; (PC, PD, SNf, SNd)]	[II ; (SNf, SA)]	[II ; (PC, V, SNf)]	[II ; (V, SNf, SA)]
	3-22	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]	[EPC ; (SNf, SNd)]	[EPC ; (SNf, SA)]	[II ; (V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]

Tabla 5.2 b)

Alumnos		Situaciones					
		Situación1	*Situación2*	*Situación3*	*Situación4*	*Situación5*	*Situación6*
Cuarto	4-1	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[EPC; (PC, SNf]	[IE; (SNf)]	[II; (SNf)]	[II; (PC, V, SNf)]
	4-2	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]	[EPC; (PC, SNf, SNd)]	[EPC; (SNf)]	[II; (SNf)]	[II; (PC, SNf)]
	4-3	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]	[EPC; (SNf, SNd)]	[EPI; (SNf, SA)]	[II; (SNf)]	[IE; (V, SNf, SA)]
	4-4	[II ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]	[EPI ; (PC, PD, SNf, SNd)]	[II; (SA)]	[D; (PC, V, SNf)]	[IE; (SNp)]
	4-5	[EPC; (PC, V, SNf)]	[EPC; (PD, V, SNf)]	[EPI ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[II; (V, SNf)]	[IE; (SA, SNp)]
	4-6	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (PD, SNf)]	[EPI ; (PC, PD, SNf, SNd)]	[II; (SNf)]	[EPC; (SNf)]	[IE; (SNf, SNd)]
	4-7	[EPI ; (PC, SNf)]	[EPI; (PD, SNf)]	[EPI ; (PC, PD, SNf)]	[II; (PC)]	[II; (PC, V, SNf)]	[EPC; (SNf)]
	4-8	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (PC, PD, SNf)]	[EPC; (PC, SA)]	[II; (PD, SNf)]	[EPC; (V, SNf)]
	4-9	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC; (PD, SNf)]	[EPC; (PC, PD, SNf, SNd)]	[EPC; (SA)]	[II; (PD, V, SNf)]	[EPC; (SNf)]
	4-10	[EPC ; (V, SNf)]	[II; (SNf)]	[D; (SNf, SA)]	[II; (V)]	[EPI; (SNf, SA, DV)]	[IE; (SNf)]
	4-11	[EPI ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPC; (SNf, SA)]	[II; (SNf)]	[EPC; (SNf)]
	4-12	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC ; (PD, SNf)]	[EPI ; (PC, SNf, SNd)]	[II; (SNf,)]	[EPC; (PC, SNf)]	[II ; (PC, SNf)]
	4-13	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (SNf, SA)]	[EPC; (SA)]	[II ; (PC, SNf)]
	4-14	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[D; (------)]	[EPC; (SNf)]	[EPC; (SNf)]	[II; (V, SNf)]	[EPC; (V, SNf)]
	4-15	[EPC ; (V, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (SA)]	[II; (V, SNf)]	[EPC ; (V)]
	4-16	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (SA)]	[II; (PD, V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]
	4-17	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC; (PD, SNf)]	[EPC; (V, SNf, SNd)]	[II; (SNf)]	[II; (V, SNf)]	[EPC ; (SNf)]
	4-18	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPC; (PD, V, SNf)]	[IE; (SNf)]	[II; (SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]
	4-19	[EPC ; (PC, SNf)]	[EPC; (PD, SNf)]	[EPC ; (PC, PD, V, SNf)]	[II ; (SNf)]	[II; (PD, V, SNf, SNp)]	[EPC ; (SNf)]
	4-20	[EPC ; (PC, V, SNf)]	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (SNf, SA)]	[II; (V, SNf)]	[EPC ; (V, SNf)]

Tabla 5.2 c)

Alumnos		Situaciones					
		Situación1	*Situación2*	*Situación3*	*Situación4*	*Situación5*	*Situación6*
Quinto	5-1	[EPC; (PC, V, SNf)]	[EPI; (SNf)]	[EPC; (PD, SNf)]	[EPI; (SNf, SA)]	[D; (V)]	[EPC; (SNf)]
	5-2	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (PD, SNf)]	[EPC; (SNf, SNd)]	[EPC; (SNf)]	[II; (PD, V, SNf)]	[EPC; (SNf, SNp)]
	5-3	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPC; (V, SNf)]	[EPI; (SA)]	[II; (V, SNf)]	[EPC; (SNf)]
	5-4	[EPC; (SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPI; (SNf)]	[II; (SNf)]	[II; (SNf)]	[EPC; (SNf)]
	5-5	[EPC; (PC, SNf)]	[EPI; (PD, SNf)]	[EPC; (PD, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[II; (V, SNf)]	[D; (V)]
	5-6	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[IE; (V, SNf, SNd)]	[II ; (SNf)]	[EPC; (V, SNf)]	[D; (V)]
	5-7	[EPC; (SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPI; (SNf)]	[II ; (SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPC; (V, SNf)]
	5-8	[EPC; (PC, V, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPI; (SNf)]	[II ; (SNf)]	[D; (PC)]	[EPI; (V, SNf, SNd)]
	5-9	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[D; (SNf)]	[EPI; (SNf)]	[II; (SNf)]	[EPC; (V)]
	5-10	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (SNf, SA)]	[II; (V, SNf)]	[EPC; (V, SNf)]
	5-11	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPC; (SNf)]	[II; (SNf)]	[EPC; (PC, SNf)]
	5-12	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPI; (V, SNf)]	[EPC ; (SNf)]	[II; (V, SNf)]	[II; (SNf, SNp)]
	5-13	[EPC; (SNf)]	[EPC; (SNf)]	[IE; (SNd)]	[EPI; (SA)]	[II; (SNf)]	[EPC; (SNf)]
	5-14	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[IE; (V, SNd)]	[EPC; (SNf)]	[D; (V)]	[EPC; (SNf)]
	5-15	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (SA)]	[EPC; (V)]	[EPC; (SNf)]
	5-16	[EPI ; (V, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[IE; (PD, SNd)]	[D; (----)]	[IE; (SA, DV)]	[D; (----)]
	5-17	[EPC; (V, SNf)]	[EPC; (PD, V, SNf)]	[EPC; (SNf, SNd)]	[EPC; (SNf)]	[II; (SNf, SNp)]	[EPC; (SA)]
	5-18	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (PC, SNf)]	[EPC; (SNf)]	[II; (PC, V, SNf)]	[EPC; (SNf)]

Elaboración propia.

5.4 DIFERENCIAS RELATIVAS A LOS SIGNIFICADOS DEL NÚMERO RACIONAL

En este apartado se presentan los resultados cuantitativos y cualitativos de la evaluación de comprensión de los significados del número racional que muestran los estudiantes de formación docente. La finalidad es analizar la naturaleza de la comprensión de los significados del número racional basándose en las repuestas que proporcionan a las preguntas abiertas del instrumento descrito en la tabla 5.1.

Los significados del número racional que evaluamos son cinco; el número racional en sus significados como 'parte-todo' (discreto y continuo), 'cociente', 'medida', 'razón' y 'operador'.

5.4.1 Interpretación Cuantitativa de los Significados del Número Racional

5.4.1.1 Empleo propio correcto en la interpretación del significado

Para una interpretación de tipo cuantitativo sobre las características y grado de comprensión de los significados del número racional se ha analizado las respuestas escritas de la prueba de seis cuestiones que evalúan los significados:

1. Interpreta el significado 'parte-todo continuo' del número racional.
2. Interpreta el significado 'parte-todo discreto' del número racional.
3. Interpreta el significado como cociente del número racional.
4. Interpreta el número racional en su significado de 'medida'.
5. Interpreta el número racional en su significado de 'razón'.
6. Identifica la fracción en su significado como 'operador'.

Los datos se han organizado en tablas que identifican las categorías de respuestas, de empleo propio correcto (EPC) del significado, empleo propio incorrecto (EPI), interferencias externas (IE), Interferencias internas (II) y respuestas dudosas en la solución de los problemas. Luego, se ha efectuado tres exploraciones; uno que cuantifica porcentualmente las muestras de desempeños que revelan una correcta interpretación del significado del número racional (EPC) por niveles o grados de estudio de formación magisterial; otro, que concierne a la jerarquización de los significados según la comprensión del estudiante; y finalmente, un dimensionamiento del grado o nivel de comprensión de los significados basado en el número de respuestas del tipo empleo propio correcto por estudiante.

A continuación se presentan las tablas que contabilizan la frecuencia absoluta y porcentual de las muestras de desempeño en la solución de la prueba por categorías EPC, EPI, IE, II y D; por grados de estudio o nivel de estudios de formación magisterial.

La tabla 5.3 revela que el empleo propio correcto (EPC) del significado en la solución a las situaciones es el más alto porcentualmente alcanzado del orden del 56% en tercero, 60% en cuarto y 62% en quinto, también, se aprecia que el porcentaje crece conforme se aumenta de grado o curso.

Tabla 5.3

Frecuencia Absoluta y Relativa de las Respuestas Dadas por Categorías y Niveles de Estudios Profesionales

Tercero

Categorías de respuestas	S1	%	S2	%	S3	%	S4	%	S5	%	S6	%	TOTAL	%
Empleo Propio														
Correcto	19	86	14	64	13	59	12	55	2	9	14	64	74	56
Incorrecto	1	4	4	18	3	14	5	23	2	9	1	4	16	12
Interferencia														
Externa o Exógena	2	9			2	9	1	4			2	14	8	6
Interna o Endógena			3	14	4	18	3	14	18	82	4	14	31	23
Dudosa			1	4			1	4			1	4	3	2

Cuarto

Categorías de respuestas	S1	%	S2	%	S3	%	S4	%	S5	%	S6	%	TOTAL	%
Empleo Propio														
Correcto	17	85	17	85	14	70	10	50	3	15	11	55	72	60
Incorrecto	2	10	1	5	5	25	1	5	1	5			10	8
Interferencia														
Externa o Exógena							2	10			5	25	7	6
Interna o Endógena	1	5	1	5			7	35	15	75	4	20	28	23
Dudosa			1	5	1	5			1	5			3	3

Quinto

Categorías de respuestas	S1	%	S2	%	S3	%	S4	%	S5	%	S6	%	TOTAL	%
Empleo Propio														
Correcto	17	94	16	89	9	50	9	50	3	16	13	72	67	62
Incorrecto	1	6	2	11	4	22	4	22			1	6	12	11
Interferencia														
Externa o Exógena					4	22			1	6			5	5
Interna o Endógena							4	22	11	61	1	6	16	15
Dudosa					1	6	1	6	3	16	3	16	8	7

Elaboración propia.

Los porcentajes de empleo propio correcto del significado parte-todo continuo y discreto (S1 y S2) son los más altos (86%, 85% y 94% en los tres grados respectivamente), en contraste a los alcanzados en la interpretación del significado de razón (S5) que apenas llegan al orden 9% en tercero, 15% en cuarto y 16% en quinto. Ésta es una regularidad encontrada que se manifiesta de forma uniforme en los tres cursos. Otro elemento de análisis es el porcentaje del significado de medida (S4), que oscila entre 55 y 50% ocupando el penúltimo lugar antes del significado de razón. Estas observaciones corroboran lo encontrado en anteriores investigaciones como Escolano y Gairin (2005) y Dos Santos (2005). Muchos estudios señalan que los significados que se configuran en su génesis histórica (medida en la civilización Mesopotámica y Egipto; y razón, en la antigua Grecia) son los menos estudiados en la escuela, quizá por la complejidad conceptual que entrañan.

La tabla 5.4 sintetiza la frecuencia relativa del desempeño interpretativo con **empleo propio correcto** de los cinco significados, según los tres grados o cursos: tercero, cuarto y quinto de formación profesional.

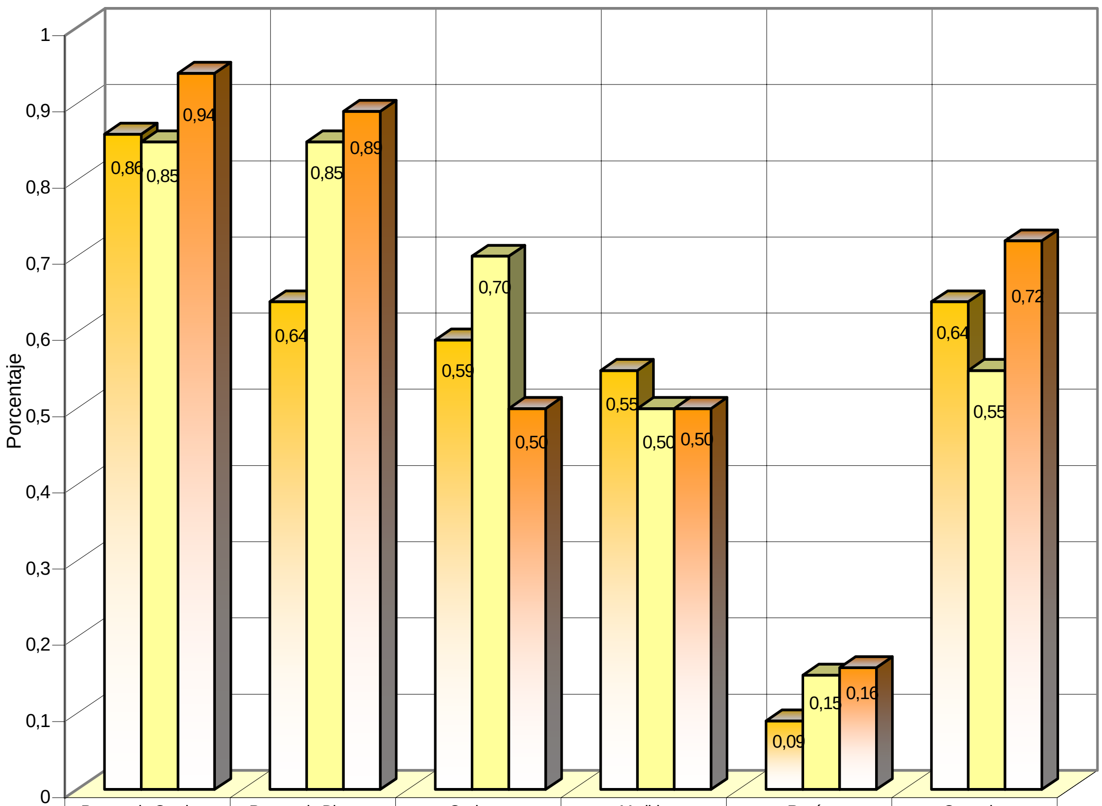
Tabla 5.4
Frecuencia Relativa de la Muestra de Desempeño Interpretativo del Empleo Propio Correcto de los Significados del Número Racional.
De los Tres Niveles de Estudio (tercero, cuarto y quinto)

	Significados	**Parte-todo**		**Cociente**	**Medida**	**Razón**	**Operador**	**Número de Interpretaciones correctas**
		Continuo	**Discreto**					
	Desempeños esperados	Interpreta el significado 'parte-todo continuo' del número racional.	Interpreta el significado 'parte-todo discreto' del número racional.	Interpreta el significado como cociente del número racional.	Interpreta el número racional en cu significado de 'medida'.	Interpreta el número racional en su significado de 'razón'.	Identifica la fracción en su significado como 'operador'.	
	Nivel	h_i	h_i	h_i	h_i	h_i	h_i	h_i
Estudiantes	Tercero	0,86	0,64	0,59	0,55	0,09	0,64	0,56
	Cuarto	0,85	0,85	0,70	0,50	0,15	0,55	0,60
	Quinto	0,94	0,89	0,50	0,50	0,16	0,72	0,62
	Total	0,88	0,78	0,60	0,52	0,13	0,63	0,59

Elaboración propia.

Según la tabla 5.4, en cifras totales, las muestras de desempeño favorables a la comprensión son progresivas desde el tercer año de estudios hasta el quinto. Así, en términos generales, la última columna muestra que el porcentaje de comprensión del quinto año es del orden del 0,62 relativamente superior al del tercero que es 0,56%. Una observación más cuidadosa de los índices del empleo propio correcto del significado en las soluciones de los seis problemas de fracciones, según los niveles o grados de estudios profesionales revela que la comprensión aparenta no progresar conforme se sube de grado. Esto contradice las cifras totales de arriba que insinúan que a medida que los estudiantes suben niveles de estudios, mejoran su comprensión de los significados. Como se aprecia en el gráfico de barras 5.4, sólo en el significado de parte-todo discreto y razón efectivamente se ve un crecimiento de grado a grado. Por otro lado, se encuentra leves divergencias con la regularidad en los significados parte-todo continuo, cociente medida y operador.

Un dato destacable es que, el número racional en su significado de razón es de menor comprensión por parte de los sujetos de la muestra, así su frecuencia relativa simple alcanza el 0,13; es decir, que de cada 100 sólo 13 logran responder con éxito la pregunta que evalúa el significado de razón de la fracción. El significado de mayor dominio o comprensión es el de fracción como ‘parte-todo continua’ mayor al de ‘parte-todo discreto’. En cifras totales, la primera supera largamente a la segunda (de 0,88 a 0,78).



	Parte todo Continuo	Parte todo Discreto	Cociente	Medida	Razón	Operador
Tercero	0,86	0,64	0,59	0,55	0,09	0,64
Cuarto	0,85	0,85	0,70	0,50	0,15	0,55
Quinto	0,94	0,89	0,50	0,50	0,16	0,72

Significados del Número Racional

Figura 5.4 Frecuencia relativa de la muestra de desempeño interpretativo del empleo propio correcto de los significados del número racional.

5.4.1.2 Orden en la interpretación de los significados del número racional

En este numeral se presentan los resultados que describen el porcentaje del empleo propio correcto (EPC) del significado de la prueba de comprensión. Se evidencia el orden que configuran dichos datos, graduación que encabeza el significado parte-todo continuo, seguido de la interpretación parte-todo discreto, luego operador, cociente, medida y finalmente razón. Estos resultados no son concluyentes, mucho menos generalizables, por la misma naturaleza exploratoria del estudio. Si bien tiene limitaciones, abre pistas a futuros estudios que confirmen, en parte, estas observaciones.

El gráfico de barras 5.5 exhibe los resultados globales, el porcentaje de estudiantes de los tres grupos que responden correctamente a las seis cuestiones planteadas en la prueba de comprensión de los significados del número racional. El gráfico ilustra el orden decreciente siguiente: primero, se ubica el significado parte-todo continuo con 88%, seguido de los significados parte-todo discreto, operador, cociente, medida que disminuyen gradualmente en el porcentaje de estudiantes que interpretan correctamente los significados; y finalmente, el significado de razón que apenas alcanza el 15%.

La información del gráfico de barras confirma lo que investigaciones anteriores, como la de Escolano y Gairín (2005, 2001), encontraron en otras latitudes del orbe con similares resultados. Evidencian que los significados de razón y medida son los menos trabajados y estudiados en los sistemas escolares, ya sea por razones de su complejidad conceptual o por descuido del sistema didáctico.

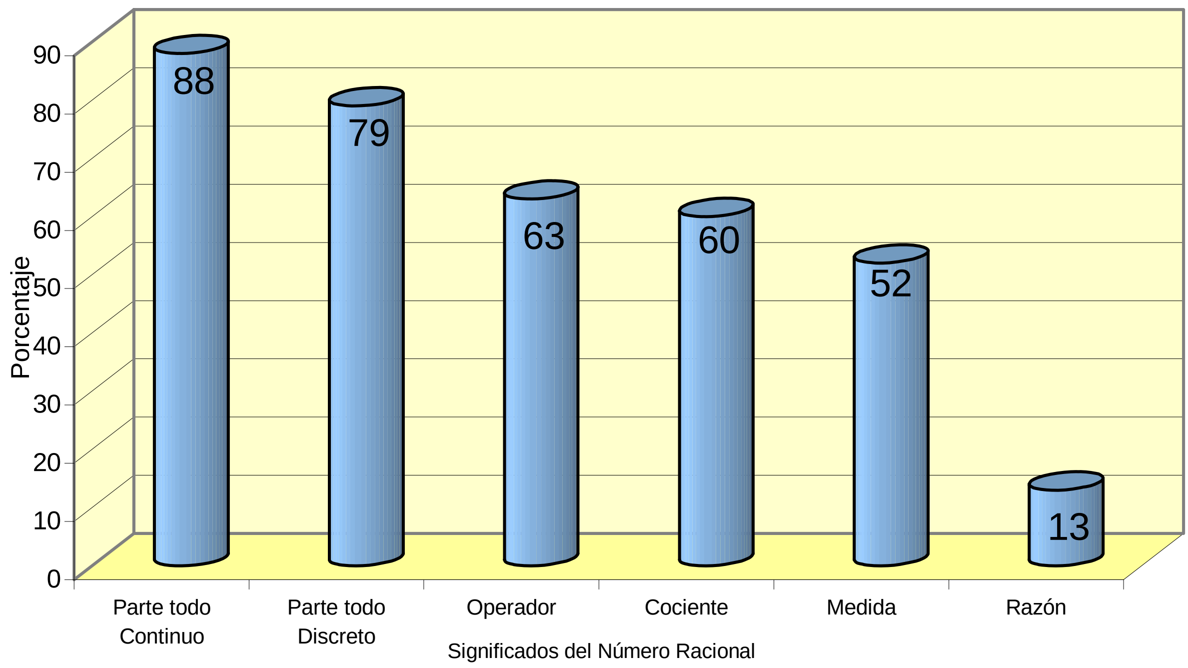


Figura 5.5 Orden en la interpretación de los significados del número racional

El significado **parte-todo continuo** del número racional revela mayor comprensión por parte de los estudiantes, lo que se manifiesta en el alto porcentaje de respuestas correctas 88%. Este resultado coincide con los encontrados en el análisis de libros de textos del Capítulo IV. Como quedó demostrado, los autores de los libros de texto muestran su preferencia por las representaciones pictóricas que transmiten el significado de parte-todo continuo para introducir la idea de fracción y desarrollar el concepto de número racional.

Al igual que el caso anterior el significado **parte-todo discreto** alcanza el alto porcentaje de 79% de respuestas correctas. El éxito en la interpretación de los significados de parte-todo ya sea continuo o discreto parecen tener su explicación en el sistema didáctico, es decir en la relación ternaria docente, alumno y el saber matemático. El análisis de los libros de texto muestran que estos significados son los más trabajados. Por otro lado, la revisión histórica revela que los significados de medida y razón están asociados a una fenomenología que se constata en los antecedentes históricos de los babilonios, egipcios y griegos. En la revisión histórica no se ha podido ubicar el significado parte-todo, pareciera que tiene sus orígenes en las necesidades de instrucción. Aparentemente, el significado parte-todo tiene su origen en la esfera de la transposición didáctica tanto externa como interna, (Chevallard, 1991).

El problema referente al **número racional como operador** alcanza el 63% de respuestas correctas, tercero en el orden de mayor comprensión que muestran los estudiantes. Los resultados primarios de la revisión histórica revelan que el significado de operador tiene su origen en la propia matemática y se comporta como una función del tipo $f(x)=\frac{a}{b}x$, donde $\frac{a}{b}\in Q$. En la medida que estas nociones matemáticas son muy utilizadas en la educación matemática superior, los estudiantes muestran mayor comprensión en la resolución de esta cuestión.

En cuarto lugar, siguiendo el orden, se encuentra el **significado del número racional como cociente** con 60% de aciertos en la solución de la tercera cuestión de la prueba. En el Capítulo V se ha encontrado que en los libros de texto, la mayoría de los autores sustentan la necesidad de ampliar o extender el conjunto de los números enteros, por la imposibilidad clausurativa de la operación división en Z. Así Romero (1976) define:

> ... los números racionales es una extensión necesaria del conjunto de los números enteros, porque:
>
> - permite obtener la clausura en la división de dos enteros *a*, *b*, con la única restricción de que b sea diferente de cero.
> - Por consiguiente, hace posible hallar el conjunto solución de ecuaciones de la forma $a\,x = b$, con $a \neq 0$. (p. 69)

En la medida que este significado es ampliamente estudiado en la educación secundaria, quizás ésta sea una de las razones que expliquen la relativa comprensión de este significado que muestran los estudiantes tal como se ha podido constatar en los resultados de la prueba de fracciones.

Las respuestas a la interrogante que evalúa la comprensión del **significado medida del número racional** alcanza el 52% de respuestas correctas, penúltimo en el orden de jerarquías y solo seguido por el significado de razón. Este significado tiene sus orígenes en la necesidad de medir una longitud y unidad de medida que no cabe un número entero de veces en ella, ésta puede fraccionarse para obtener una medida más precisa. La unidad de medida debía ser dividida en sub unidades de medida para garantizar la realización. A pesar de la rica génesis histórica y una fenomenología asociada que ostenta este significado, en los libros de texto y su tratamiento en el aula es escaso; tal como se constató en el análisis del capítulo V. De ahí que los resultados arriba presentados muestren dificultades en la comprensión del significado, en su tratamiento e interpretación, al momento de solucionar una situación matemática de este tipo.

Finalmente, al último y en orden descendente, se ubica **la fracción como razón**, la relación que existe entre dos cantidades de magnitud, la comparación entre los cardinales de dos conjuntos, como problema propuesto en la prueba (dado el cardinal del conjunto de los libros de matemática y de investigación, *¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?*). La comparación se establece entre las cantidades que expresan el numerador y el denominador y, por tanto, el orden en que se citan las magnitudes que se están comparando es esencial, Gairín y Sancho (2002). Los datos estadísticos puntúan el 13% de empleo propio correcto del significado en la interpretación de la situación. A pesar de que en los libros de texto se ha encontrado que se dedica un capítulo llamado "Razones y Proporciones", los resultados son desalentadores dado el bajo porcentaje registrado. Eso implica que los estudiantes están poco familiarizados con este significado, pues lo confunden con la fracción como parte-todo discreto.

En conclusión, los datos empíricos revelan que existe un ordenamiento jerárquico en el porcentaje del *empleo propio correcto* del significado en la resolución de las situaciones matemáticas de la prueba. Este orden parece mostrar una preeminencia del significado parte-todo sobre los demás, (parte-todo continuo y parte-todo discreto) sobre los significados operador, cociente, medida y razón. Una vez más, llama la atención que los significados de medida y razón sean los menos resueltos, a pesar que estos están en la génesis histórica y que, pese a ello, es la menos estudiada y comprendida en la escuela.

5.4.1.3 Grado de interpretación de los significados del número racional

Para dimensionar los grados o niveles de comprensión de los significados del número racional se ha contabilizado el número de respuestas correctas como lo muestra la tabla del Anexo A.4.1 y se ha establecido las siguientes categorías que se describen a continuación:

- **Primer grado**: en este estadio se agrupan los estudiantes que logran responder correctamente sólo uno de los problemas propuestos en la prueba, esto es independiente del tipo de significado al que corresponde el problema, solo interesa el número.
- **Segundo grado**: Se considera el suceso de encontrar estudiantes que solucionan solo dos problemas del cuestionario propuesto.
- **Tercer grado**: Se tipifica como tal, el evento que un estudiante haya resuelto hasta tres problemas.
- **Cuarto grado**: Se encuentran los estudiantes que logran resolver hasta cuatro problemas relativos a los significados del cuestionario en cuestión.
- **Quinto grado**: Se ubicará en este grado los estudiantes que responden correctamente hasta cinco situaciones problemáticas de la prueba.
- **Sexto grado**: Corresponde a los estudiantes que logran solucionar íntegramente la prueba de comprensión de los significados del número racional.

En la siguiente tabla 5.5 se exhiben los resultados de esta categorización para el análisis de los niveles de comprensión que arriba se ha establecido:

Tabla 5.5
Grado de Interpretación del Significado del Número Racional
Frecuencia Absoluta del Número de Interpretaciones Correctas por Cursos

	Grados de interpretación					
	Primer grado	**Segundo grado**	**Tercer grado**	**Cuarto grado**	**Quinto grado**	**Sexto grado**
Tercero	0	7	6	3	6	0
Cuarto	3	0	5	6	6	0
Quinto	1	1	7	3	5	1
Total	4	8	18	12	17	1
Porcentaje	7	13	30	20	28	2

Elaboración propia.

La distribución de los grados de interpretación se configura de la siguiente manera: cuatro estudiantes que significan el 7% de la muestra se ubican en el primer grado, en tanto que sólo un alumno, o sea el 2%, se sitúa en el sexto grado de comprensión. Consideramos estos casos como particulares, porque pueden deberse a situaciones fortuitas o resultados que se ajustan al comportamiento normal de las muestras probabilísticas; sin embargo, estos resultados aperturan pistas para investigaciones futuras que tendrán el objetivo de confrontar estas intuiciones preliminares. En el segundo grado de comprensión se ubican el 13% de la muestra, que junto con el primer grado acumulan el 20% de estudiantes que logran resolver de uno hasta dos problemas.

Es alentador observar que en cifras acumuladas el 78% de los estudiantes logran responder de forma correcta entre tres y cinco problemas del instrumento de evaluación, estos se ubican en el tercero, cuarto y quinto nivel de comprensión, como se puede observar en el gráfico de barras de la figura 5.6.

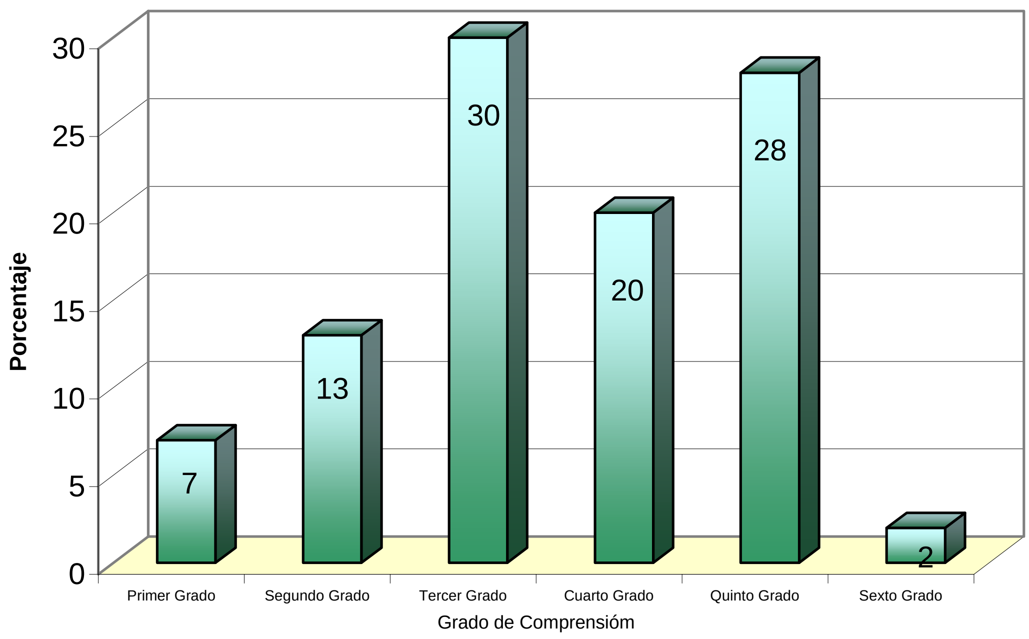


Figura 5.6 Grados de comprensión de los significados del número racional

El empleo propio correcto (EPC) del significado en la resolución de las situaciones matemática que evalúan la comprensión de las interpretaciones del número racional de los alumnos de formación magisterial es de aproximadamente 4 $(\bar{x} = 3{,}55)$ de las respuestas correctas. En tanto, la mitad de los estudiantes interpretan correctamente los significados adecuados en la resolución, es decir logran como máximo resolver cuatro situaciones problemáticas $(M_e = 3{,}50)$, mientras que la otra mitad tiene más de cuatro respuestas correctas. La mayoría de los estudiantes tiene un desempeño de 3 $(M_o = 3)$ respuestas con empleo propio correcto. Las respuestas con empleo propio correcto se dispersan respecto a la media de 4 en aproximadamente 1 $(s = 1{,}27)$ punto. Como el coeficiente de variación es de 35.8%, la media aritmética es una medida no tan representativa de los datos; por consiguiente, se debe considerarlo simplemente como un referente. Como la asimetría $(As = 0{,}43)$ es mayor que 0 la distribución es positiva, tal como se puede observar en el gráfico de barras 6.6, lo que revela que la muestra de estudiantes se sitúa próximo a los grados tercero, cuarto y quinto de comprensión. El coeficiente de Kurtosis $(k = 0{,}333)$ indica que la curva correspondiente a la distribución de frecuencia es leptocúrtica $(k > 0{,}263)$ por cuanto el coeficiente es mayor que 0,263.

Tabla 5.6
Frecuencia del Empleo Propio Correcto del Significado del Número Racional

Grado	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
1	4	6.7	6.7
2	8	13.3	20.0
3	18	30.0	50.0
4	12	20.0	70.0
5	17	28.3	98.3
6	1	1.7	100.0
Total	60	100.0	

Elaboración propia.

5.4.2 Caracterización Cualitativa de los Significados

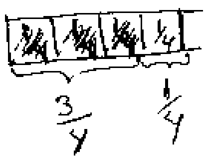
Dado que la evaluación de un fenómeno de comprensión no se puede limitar a su dimensión cuantitativa, en este numeral se realiza un acercamiento cualitativo e interpretativo de los registros de representación que el estudiante presentó en la resolución de las situaciones con fracciones.

5.4.2.1 El significado de fracción como “parte-todo” continuo

En este segmento se reporta observaciones referentes a la comprensión del significado ‘parte-todo continuo’ de la fracción, al responder a la interrogante Nº 1; *“Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?”.*

Los resultados revelan que los estudiantes en su mayoría tienen un dominio total de esta interpretación ya que los utilizan en sus respuestas; es decir, emplean adecuadamente el significado pertinente en la situación problemática como lo demuestran las siguientes respuestas representativas.

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?



Tome ~~los~~ 3 tros de los 4 trozos que habían

∴ Tomé = $\frac{3}{4}$

4-13

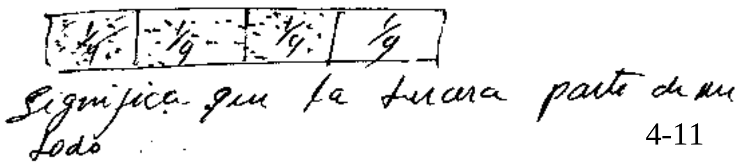
Figura 5.7 Respuesta al problema del significado parte todo continuo. Estudiante 4-13

Este protocolo de resolución manifiesta una cabal comprensión del significado en cuestión, pues en el proceso utiliza un pictograma y muestra la conversión al registro simbólico fraccional, además de un enunciado verbal que interpreta el significado de la fracción.

Las representaciones que más utilizan son la simbólica fraccional y pictórica. Así mismo, es interesante ver que algunos estudiantes relacionan esta acepción con el significado de porcentaje al identificar ¾ con 75% y ¼ con 25%.

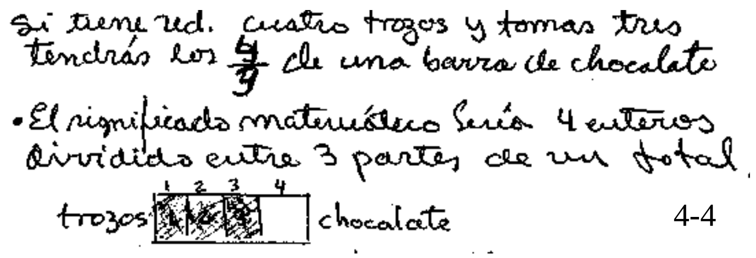
Las siguientes muestras de respuestas de empleo propio incorrecto del significado serán de utilidad para plantear conjeturas sobre las razones de estos desaciertos. La interrogante es por qué se producen. Esta respuesta más adelante se abordará como fenómeno de interferencia. Ejemplos de errores:

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?



4-11

a) Empleo Propio Incorrecto (EPI).



b) Interferencia Interna (II).

4-4

Figura 5.8 Respuesta equivocadas al problema del significado parte todo

En la figura 5.8 a) se observa una respuesta del tipo EPI en cual el estudiante confunde la cuarta parte con *'la tercera parte de un todo'*, esta interpretación posiblemente esté relacionado con los 'tres' trozos sombreados que por ser tres lo conduce a afirmar que es la tercera parte. Debido al carácter de las observaciones empíricas estamos limitados para dar explicaciones a este tipo de respuestas, tan sólo podremos plantear algunas conjeturas sobre determinado comportamiento. En este caso, es probable que el error tenga sus causas en la distracción o el olvido de la interpretación del significado parte-todo de la fracción.

La respuesta de la Figura 5.8 b) corresponde a una interferencia interna de significados, pues se evidencia la posibilidad, siempre latente, de confundir la interpretación el número total de particiones con el número que se toma de ellos. Esto tiene posiblemente su explicación en el significado de fracción como 'división indicada' que tiene el sujeto como conocimiento previo al momento de interpretar la situación propuesta. Su razonamiento sería el siguiente: '¿Qué se divide? ¿el todo?. En la respuesta se entiende que <u>*4 enteros se divide entre 3*</u> pero está advertido que el todo está relacionado con el denominador que en este ejemplo es representado por 4. Como resultado de su razonamiento entonces divide 4÷3', es claro el razonamiento errático del sujeto. Pero este proceder oscila entre las dos acepciones en conflicto, porque la gráfica que presenta es correcta, pero como resultado de las contradicciones mal manejadas su respuesta está errada.

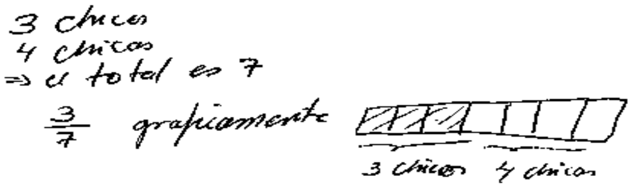
El significado de fracción como parte de una unidad continua es el más comprendido por los estudiantes de formación docente: 'divido una barra de chocolate en cuatro partes iguales y tomo tres', esta expresión revela que se trata de una unidad continua, es más escaso plantear situaciones de este tipo: 'tengo cinco libros, tres de matemática y dos de comunicación, entonces digo tres quintos de mis libros son de matemática', situación que indagamos en el siguiente numeral.

5.4.2.2 La fracción en su acepción parte-todo discreto

La interrogante **'***Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?'* tiene la intención de averiguar en el estudiante su conocimiento de la fracción como 'parte de un todo discreto' que es similar al anterior.

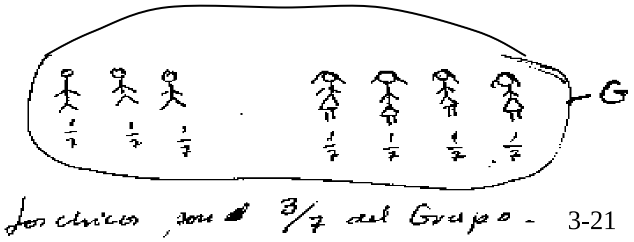
La mayoría de estudiantes la interpretan de forma correcta, comprenden que la fracción del grupo de amigos que son chicos es 3/7. Para ello, presentan representaciones pictóricas de siluetas humanas; sin embargo algunos persisten en la representación continua de un rectángulo dividido en 7. En la interpretación del significado parte-todo discreto se encontró la influencia de la interpretación parte-todo continuo; así, se constata en la respuesta del estudiante (3-17) del tipo empleo propio correcto del significado que ilustra la figura 5.9 a).

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?



3-17

a) Persistencia de pictogramas continuos. (EPC).



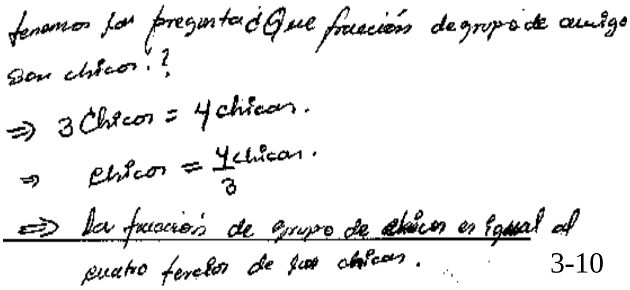
3-21

b) Respuesta correcta con pictogramas discretos (EPC).

Figura 5.9 Respuesta al problema del significado parte todo discreto de la fracción.

El enunciado del problema no deja abierta la posibilidad de interpretaciones del tipo de razón, sin embargo, se observa algunas confusiones en la interpretación como resultado de querer aplicar el significado de ‘la fracción como razón’. Estas se manifiestan en la siguiente respuesta del tipo interferencia interna:

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?



3-10

Figura 5.10 Respuesta al problema del significado parte todo discreto.

Sostener que el número de chicos es 4/3 delata el descuido en la percepción de la 'totalidad' que el enunciado del problema sugiere '*¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?*' El enunciado del problema no deja abierta la posibilidad de equivocación si se lee bien.

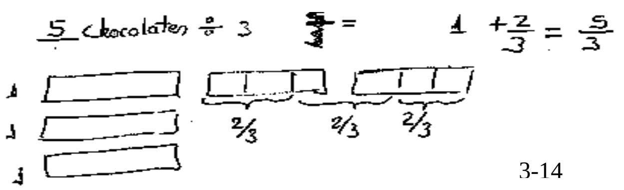
5.4.2.3 La fracción en su significado cociente de enteros

Castro y Torralbo Afirman que la fracción *a/b* significa cociente entre dos números *a* entre *b*. (2001, p. 289). Este significado se origina de la necesidad de la división. Así Birkhoff y MacLane (1954) enuncian: "La división (excepto por cero) es posible y uniforme en todo campo" Así en un campo $b\ x = a$ tiene solución única $x = a/b$, con $b \neq 0$. (p. 42). La interrogante del cuestionario que tiene por objeto auscultar si los estudiantes interpretan y evalúan este significado de fracción es '*Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?*' La respuesta esperada es que el estudiante explique el proceso de reparto, el razonamiento y cálculos que utiliza para eso. Es poco destacable que señalen 1.66... , esto demuestra que conocen que se debe realizar la división y efectuar la operación. Lo importante de las repuestas radica en el proceso matemático de distribución del objeto. A continuación se presentan los cálculos e ilustraciones de los estudiantes tal cual fueron realizados.

La Figura 5.11 a) correspondiente al estudiante (3-14), muestra un reparto por pasos, primero asigna una unidad a cada uno: luego, cada chocolate restante es fraccionado en tres, de los cuales asigna 2/3 a cada amigo. El resultado es una suma 5/3. Este procedimiento realmente es interesante desde la perspectiva didáctica porque evidencia la forma de proceder de muchos escolares frente a una tarea de este tipo.

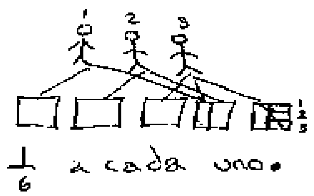
La respuesta del estudiante con código 4-7 (Figura 5.11 b) exhibe un razonamiento correcto según la representación gráfica, pero, la respuesta final es equivocada. Según la ilustración, primero asigna a cada amigo una unidad, luego ½ chocolate, seguidamente la mitad que resta lo divide en tres los que en producto de fracciones es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Probablemente esta fracción es lo que presenta como resultado olvidando sumar las anteriores asignaciones. Una solución correcta debió ser $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$. El estudiante realiza un razonamiento válido, tal como lo evidencia la representación pictórica, sin embargo, comete el error en la manipulación de la representación simbólica numérica fraccional, a este fenómeno se le denomina como un Empleo Propio Incorrecto del significado.

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?



a) Empleo Propio Correcto

3-14



b) Empleo Propio Incorrecto.

4-7

Figura 5.11 Respuesta al problema del significado cociente de enteros.

De las observaciones se desprende que muchos errores tienen su origen en la distracción, mas no en los razonamientos o desconocimiento de propiedades.

Retomando el objetivo del ítem, se observa que un tercio de los sujetos observados interpretan el problema utilizando el modelo de fracción 'parte-todo'; este modelo es muy fuerte en las estructuras cognitivas de los estudiantes, quizá se explique este fenómeno porque el significado parte-todo es el más utilizado y sirvió para introducir su aprendizaje desde la educación primaria y secundaria.

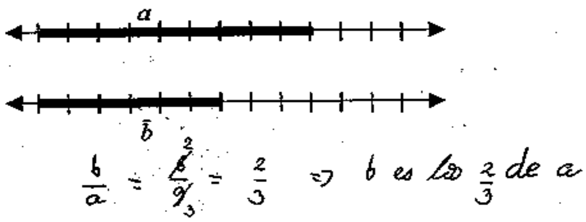
5.4.2.4 Fracciones como medida

El objetivo de la interrogante 4 es evaluar la interpretación del significado de la fracción como medida. El enunciado expresa *"De la observación de la figura. ¿Qué* *parte del segmento* $\bar{a}$ *es la medida del segmento* $\bar{b}$ *?"* . Respecto a esta tarea se encontró que 31 estudiantes de 60 efectúan la interpretación y escriben la fracción 6/9 correctamente.

La figura 5.12 a) muestra la solución del estudiante (5-10), quien establece la relación correcta $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$, además explicita que el segmento *b* mide los 2/3 del segmento *a*. Entre las respuestas correctas se ha encontrado respuestas del tipo II que sin perjudicar la solución hacen uso explícito del significado parte-todo continuo de la fracción, tal como se podrá ver más adelante cuando se analice los casos de interferencias entre significados.

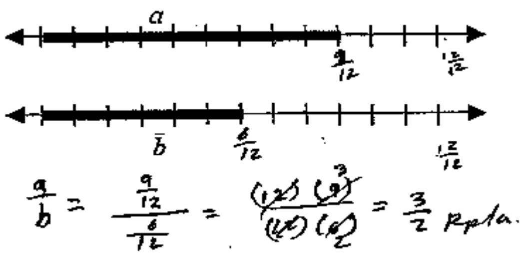
Es significativo y revelador en las respuestas erradas la intromisión del significado parte-todo en la interpretación de medida del número racional. Según la respuesta del estudiante (3-21) (figura 5.12 b) el proceso de solución involucra dos veces el significado *parte-todo continuo* en cada segmento, y establece la relación, la cual no responde a la interrogante, es decir, la medida del segmento *b*. Si el proceso hubiera continuado con despejar *b* el resultado sería correcto; pero, el estudiante no termina comprendiendo que el segmento *b* son los 2/3 de *a*, este error invalida su respuesta parcial y revela la interferencia del significado *parte-todo continuo* al efectuar la conversión de la representación gráfica del segmento a su representación simbólica numérica fraccional de 9/12 y 12/12.

4) *De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento* $\bar{a}$ *es la medida del segmento* $\bar{b}$ *?*



a) Respuesta tipo: Empleo Propio Correcto del significado de medida.

5-10



b) Respuesta incorrecta del tipo: Interferencia Interna del significado parte-todo.

3-21

Figura 5.12 Respuestas al problema del significado de medida.

5.4.2.5 La fracción en su significado de razón

Cuando la fracción se usa como "índice comparativo" entre dos cantidades de una magnitud se está frente al significado de razón del número racional. En esta interpretación no existe un todo como unidad implícita (Llinares y Sanchez, 1988 p. 67). Así la interrogante es: ***"****En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación <u>respecto al número</u> de libros de matemática?"* El todo no es nueve, porque la pregunta pretende comparar dos cantidades de libros con la frase 'respecto al número' se entiende el número de libros de investigación <u>respecto al número</u> de libros de matemática. En las respuestas de los estudiantes evaluados se encuentra que en sus razonamientos confunden este significado con el de la fracción como parte-todo.

Si bien, el problema pide encontrar la razón "...el número de libros de investigación ***respecto al*** número de libros de matemática...", también, será válida en el estudio, la relación de razón en el sentido inverso “...el número de libros de matemática ***respecto a*l** número de libros de investigación...”, así mismo se ha encontrado la razón “...el número total de libros ***respecto al*** número de libros de matemática...” (el todo respecto a la parte) que del mismo modo es una razón. A continuación se presenta los tres casos de razón que se pudo encontrar en las pruebas.

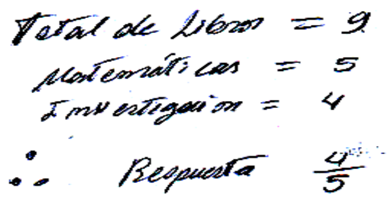
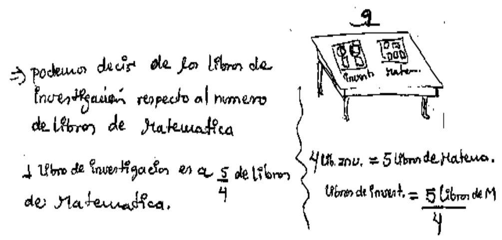
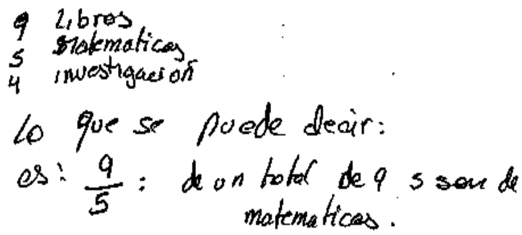
Primer caso: La parte respecto a la parte. Empleo Propio Correcto.	Número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática. (5-7)	
Segundo caso: La parte respecto a la parte. Empleo Propio Incorrecto	Número de libros de matemática respecto al número de libros de investigación. (3-10)	
Tercer caso: El todo respecto a la parte. Interferencia Interna.	Número total de libros respecto a número de libros de matemática. (4-17)	

Figura 5.13 Respuestas al problema de significado de razón.

De los sesenta estudiantes que fueron evaluados, solo catorce lograron solucionar satisfactoriamente la cuestión relativa a la fracción como razón que se ajusta al primer caso. El segundo caso, si bien es una interpretación de razón que posee las fracciones, no se ajusta al enunciado del problema, luego, se la tipifica como el *Empleo Propio Incorrecto* del significado de razón, pero en discordancia con el enunciado de la situación.

La respuesta errada más frecuente es *“los libros de investigación representan 4/9 del total mientras los libros de matemáticas son 5/9”* en todas estas se descubre una interferencia en la interpretación de la fracción como ‘parte-todo discreto’ (tercer caso). Esto muestra la poca flexibilidad en la percepción de otros significados de la fracción. Probablemente sea resultado del predominio de este concepto en los libros de texto y la forma cómo es abordada la enseñanza de los números racionales desde la educación primaria hasta la secundaria. Una sólida comprensión de los diferentes significados y formas de representar las fracciones, es la esencia de la flexibilidad al trabajar con números racionales. Los estudiantes deben manejar con facilidad a generar y reconocer formas equivalentes de fracciones (NCTM. 2000)

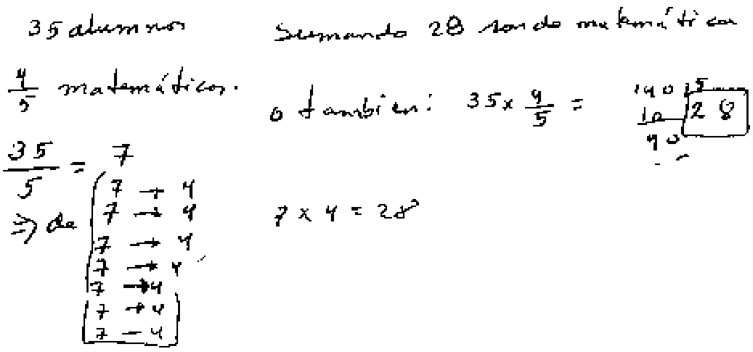
5.4.2.6 La fracción como operador

La fracción como operador actúa como una máquina o caja negra en el que ingresa una determinada situación inicial, actuando sobre ella para modificarla y finalmente obtener un producto final como lo explica Castro y Torralbo (2001, p. 291).

La cuestión número seis de la prueba diagnóstica, evalúa si los estudiantes conocen este significado, interpretan y utilizan para solucionar situaciones que demandan su uso. Esto requiere la aplicación directa del operador, como se observa en el enunciado del problema: “*En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?”*.

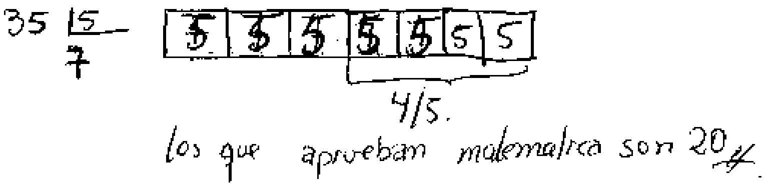
La solución más frecuente presentada por los estudiantes de los tres niveles es “*34* x *4/5 = 28* $\Rightarrow$ *28 alumnos aprueban matemáticamente.* La fracción “*4/5 significa que de cada 5 alumnos 4 aprueban matemática”*. En términos generales los estudiantes no tienen dificultades para encontrar la respuesta. En la fgura 5.14 a) se observa el proceso de solución, primero se aplica el numerador del operador, seguidamente se divide por 5. Además, son importantes las ayudas que utiliza en la resolución cuando empareja 7 con 4 para entender el significado de la multiplicación de 7x4.

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?



a) Respuesta tipo: Empleo Propio Correcto del significado.

3-19



b) Respuesta Incorrecta del tipo: Interferencia Interna

4-2

Figura 5.14 Respuestas al problema con significado de operador.

Encontramos persistentemente el uso de representaciones pictóricas continuas, aun en problemas como éste que es materia de análisis. Así, el estudiante (4-2) entiende que el denominador del operador divide al número de alumnos (35), pero luego pinta la representación rectangular y en la interpretación de la figura utiliza el significado parte-todo y comete el error, tal como se ilustra en la figura 5.14 b). Es indudable que en el intento de aplicar el operador se divide 35 entre el denominador, pero se presenta el fenómeno que denominamos *Interferencia Interna* del significado parte-todo que se manifiesta en la representación pictórica continua y como resultado concluye que 4/5 de 35 es 20.

5.5 REPRESENTACIONES EN LOS SIGNIFICADOS DEL NÚMERO RACIONAL

5.5.1 Análisis Cuantitativo de los Sistemas de Representación

La comprensión de los significados del número racional se evalúa desde las representaciones verbal, gráfica y simbólica. Los sistemas de representación expresan el significado de este objeto matemático, en tal sentido, las representaciones matemáticas integran dos entidades relacionadas mutuamente: uno, el objeto representante (representaciones) y dos, el objeto representado (los números racionales como entidad matemática abstracta).

La aplicación de las pruebas nos lleva a recoger información sobre las representaciones exteriores que manifiestan los estudiantes. En este informe estas representaciones son analizadas, además de levantar conjeturas sobre los significados que se asignan a estas representaciones para interpretar la comprensión que tienen sobre los números racionales.

Tabla 5.7
Tipos de Representaciones Utilizadas en las Respuestas a las Seis Preguntas.
Facultad Ciencias de la Educación Especialidad Matemática e Informática: 2004
Porcentaje de Respuestas Correctas

Significado	Tipo de representación utilizada							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNF**	Simbólica Numérica **SND**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **SNp**	Venn **DV**
Parte-todo continuo	57	97			69		3	
Parte-todo discreto	29	98		2	8	19		
Cociente	30	91	42	2	36	23		
Medida	5	75		39	5			
Razón	57	89		8	15	10	4	4
Operador	38	83	8	8	12		9	

Elaboración propia.

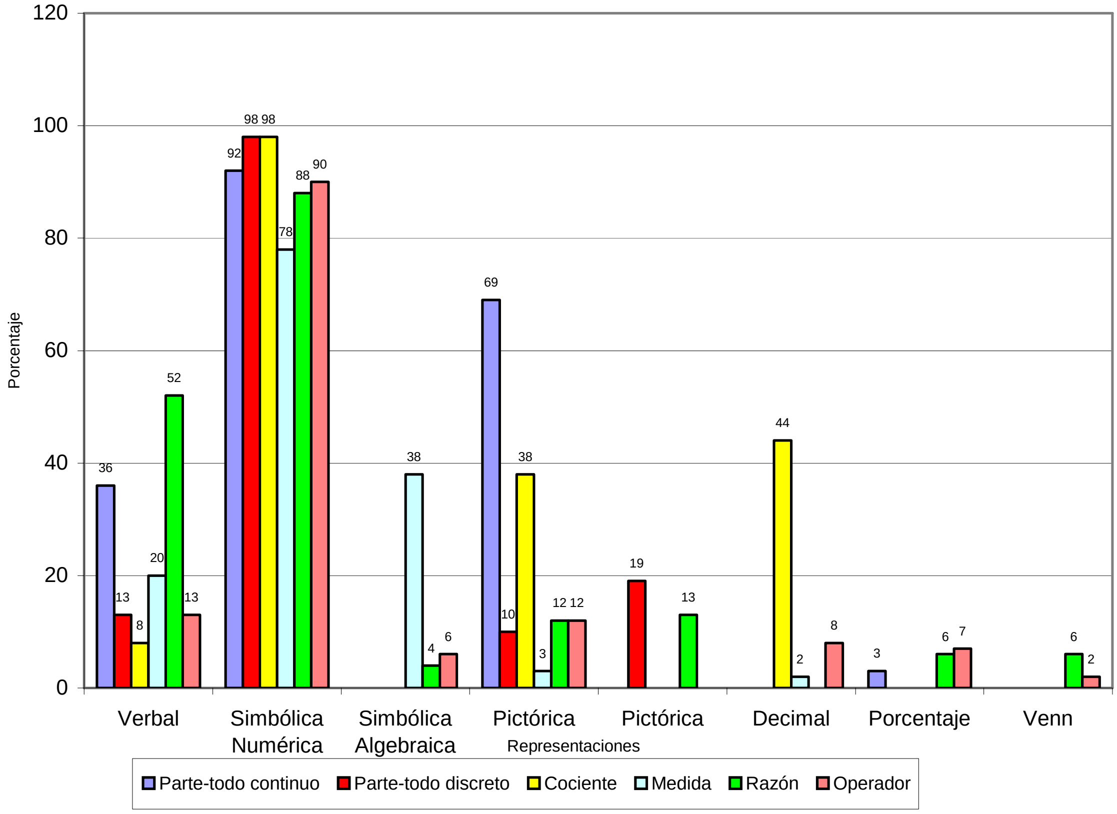


Figura 5.15 Tipo de representaciones por significados del número racional

La tabla 5.7 revela que la representación pictórica continua es una constante: Si bien ésta es pertinente a los significados 'parte-todo continua', ésta persiste en la solución de las cuestiones que corresponde a otros significados. Los casos más resaltantes son los correspondientes a los significados de 'cociente', 'operador' y 'razón', a pesar que en la resolución de estos problemas no son necesarios los registros pictóricos, los estudiantes prefieren realizarlos, quizás con la esperanza de alcanzar una comprensión de la situación problemática; sin embargo, en muchos casos ésta resulta contraproducente como quedó evidenciado en la figura 5.14 b) .

La representación decimal está muy ligado al significado de 'cociente', pues, el estudiante efectúa la división indicada como es natural. Un hecho importante es el predominio de las representaciones simbólica numérica fraccional, ésta sobrepasa el 89%, es decir, la mayoría de los estudiantes utilizan con mucha destreza el registro de representación fraccional. Además se ha encontrado que ciertos estudiantes utilizan en forma indistinta otras representaciones como los diagramas de Venn, notación porcentual, decimal y simbólica algebraica.

En conclusión, se descubrió en los protocolos de solución de las seis cuestiones, que los estudiantes manipulan con mayor frecuencia y dominio las representaciones simbólicas fraccional y ‘pictórica continua’. Ésta última, a pesar de no ser pertinente, se usó en todos los significados y su presencia es una constante, ya sea como elemento principal de la solución o como un auxiliar para entender la situación.

5.5.1.1 Significado parte-todo continuo y sus representaciones

Como es natural en la solución de un problema de enunciado verbal la presencia de las representaciones simbólica verbal y numérica, además de sus traducciones, será la más frecuente. El enunciado verbal de la fracción solución se encontró en el 57% de los estudiantes, en tanto que el 97% utiliza el registro de representación simbólica numérica fraccional. Es relevante encontrar que el 31% de los estudiantes no utiliza la representación gráfica pictórica en la solución del problema.

El comportamiento del uso de registros de representación en la solución del problema es el más adecuado, pues no se observa irregularidades que llamen la atención.

5.5.1.2. Significado parte-todo discreto y sus representaciones

Cuando se enfrentan a la situación que corresponde al significado de parte-todo discreto: “Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?”, en la solución no es significativo el uso de las representaciones graficas pictóricas discretas, ya que, según los datos estadísticos, apenas llega al 19%. Además, es notable la presencia de la representación gráfica continua, que llega a ser del 8%, a pesar que este tipo de gráficos no es apropiado a la situación problemática.

Respecto a la representación simbólica verbal ésta se encuentra disminuida al 29% en tanto que la representación simbólica numérica fraccional es la que predomina, de forma similar al caso anterior.

5.5.1.3 Significado cociente y sus representaciones

En la solución del problema de significado cociente, como es natural, se espera una respuesta basada en la representación simbólica; sin embargo, se ha encontrado que un 36% utiliza representaciones del tipo pictórica continua. Son interesantes las conversiones que se realizan de simbólica a gráfica pictórica continua y viceversa, además, queda pendiente averiguar por qué el estudiante utiliza los registros pictóricos, cuando no es necesario en estricto. Al estado de la investigación sólo se puede especular y suponer que estas representaciones cumplen un rol auxiliar para la comprensión del enunciado del problema y en la resolución misma. Evidentemente, esto ocurrirá si el estudiante no comprende que el problema se soluciona con un simple cociente indicado. Los datos dejan percibir que la presencia de las representaciones pictóricas continuas es una constante en cada uno de los protocolos de solución de las seis cuestiones de la prueba.

Como resultado de establecer el cociente indicado 5/3, el 42% de los estudiantes proceden a efectuar la división y dan como resultado el número decimal 1,666... que es una representación más del número racional y en la investigación presente no se estudia, motivo por el cual solo nos limitamos a señalar esta observación.

5.5.1.4 Significado de medida y sus representaciones

El enunciado del problema Nº 4 de significado "Medida" tiene una característica especial. De los seis problemas es el único que acompaña una representación gráfica de segmentos denotados por símbolos alfabéticos (segmento *a* y *b*). Seguramente estas particularidades del enunciado configuran el tipo de representación que el estudiante usa en la solución. Se ha encontrado que un 39% de los estudiantes utiliza representaciones simbólicas algebraicas como resultado del tipo de enunciado.

Aparentemente, la representación pictórica parte-todo continua se ha convertido en una constante. A estas alturas de la investigación, podemos afirmar, con certeza, que las representaciones pictóricas continuas están presente en la solución de situaciones problemáticas que evalúan la comprensión de los significados de medida, razón cociente y hasta operador. Como se constata en este caso que analizamos, esta representación se presenta en el orden del 5% de las respuestas.

5.5.1.5. Significado de razón y sus representaciones

En la solución del problema con significado de razón los estudiantes utilizan, como es natural y con mayor frecuencia, la representación simbólica numérica, pero además, también utilizan los pictogramas de trazo continuo (15%) y discreto (10). Por la naturaleza de las interrogantes los estudiantes emplean la representación simbólica verbal que alcanza el 57% para responder a la cuestión "¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?"

Si bien las representaciones gráficas pictóricas continuas y discretas se adecuan a situaciones de significado parte-todo del número racional, sin embargo se observa que el estudiante siempre acude a la visualización para poder comprender el enunciado del problema. Líneas adelante haremos un análisis más profundo para averiguar, aun cuando no es necesario, por qué se recurre a las representaciones pictóricas en la resolución de problema de significados razón, medida, operador y cociente.

5.5.1.6 Significado operador y sus representaciones

El significado del número racional como operador tiene su origen en la propia matemática y por esa razón, posiblemente cuando un estudiante de formación docente se enfrenta a un problema de este tipo, no encuentra mayor dificultad, y en su resolución prefiere utilizar la representación simbólica numérica con más soltura y fluidez. Como el gráfico de barras lo muestra, los demás tipos de representación se usan con menor frecuencia; de todas ellas, sólo el verbal y pictórico alcanza el porcentaje considerable del 38% y 12% respectivamente.

Se ha encontrado que existen representaciones marginales de poca incidencia, como los diagramas de Venn o la simbólica numérica porcentual que hacen su presencia muy pocas veces en la presente exploración, tal como se puede observar en la tabla 5.7.

5.5.2 Actividades Cognitivas Relacionadas a las Representaciones

Las observaciones de este numeral se realizan fundamentalmente en base al Anexo III que presenta los protocolos de solución de la totalidad de los estudiantes, para este efecto se ha optado por escanear las soluciones.

5.5.2.1 Las representaciones en la comprensión del significado parte-todo continuo

En la solución de la cuestión número 1, los registros de representación que utilizan los estudiantes son el *verbal*, *pictórica continua* y *simbólica numérica fraccional*, esencialmente; sin embargo, también se presentaron casos de *representación porcentual*. La representación verbal aparentemente es utilizada para comprender el enunciado del problema ya que se realizan parafrasees del mismo o identificación de los datos de la cuestión.

Las trasformaciones entre sistemas de representación se describen como operaciones aritméticas y como la suma de fracciones homogéneas unitarias y restas. Las conversiones entre las representaciones más usuales son las del registro pictórico continuo al simbólico numérico fraccional. Como en el caso del estudiante (4-20) la suma de fracciones se sustenta en la representación pictórica. Como, lectura de la solución, a manera de respuesta se utiliza el registro verbal con enunciados como *"tomo 3 de un total de 4"* (3-9) o *"tres cuartos"* (4-10). También se ha encontrado respuestas de tipo porcentual que asocia la fracción ¾ con el 75% (3-2). En conclusión, en las soluciones se ha encontrado el tránsito o conversión que parte del parafraseo del enunciado del problema a la representación pictórica continua, seguido de la representación simbólica fraccional y, finalmente, un registro verbal que enuncia la solución a los problemas.

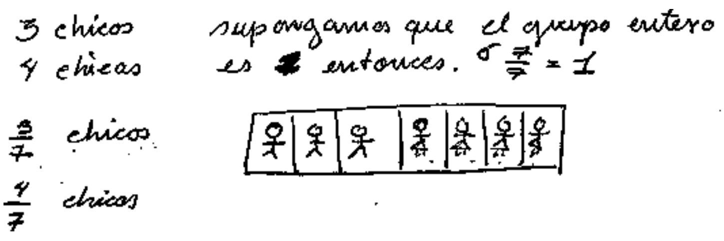
Quizás por la naturaleza de la cuestión se ha encontrado respuestas sin mayores argumentos, que señalan por simple inspección la solución ¾.

5.5.2.2 Las representaciones del significado parte-todo discreto

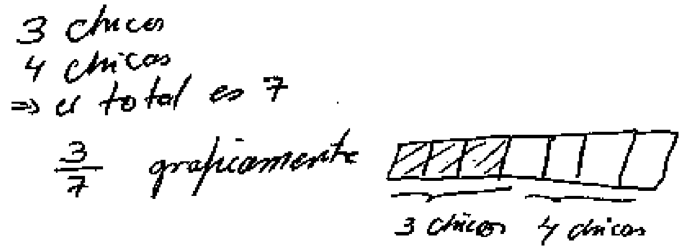
En la solución a la cuestión de **significado parte-todo discreto** se ha utilizado los **registros de representación pictórica continua, pictórica discreta, verbal y simbólica numérica fraccional (SNf).** Las transformaciones al interior del registro SNf son de naturaleza aritmética como la suma de fracciones unitarias homogéneas que se presenta en el protocolo del estudiante (4-13). Este mismo estudiante realiza una conversión de representación pictórica continua a simbólica fraccional.

Un dato importante es la intromisión de la representación pictórica continua en la resolución de un problema de parte-todo discreto, tal como se ilustra en la figura 5.16 b). Así mismo, los estudiantes: (3-15), (3-17), (4-8), (4-13) y (5-18) utilizan pictogramas de rectángulos como unidad continua (véase el anexo 7). Un caso especial es el estudiante (5-17) (figura 5.16 a) que muestra una simbiosis de una representación pictórica continua y discreta a la vez; esto revela la intromisión del significado parte-todo y sus representaciones gráficas en las demás acepciones. Véase la siguiente figura:

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?



a) Simbiosis de las representaciones pictóricas continuas y discretas.
Tipo EPC: (5-17)



b) Interferencia de la representación pictórica continua. Respuesta del tipo EPC. (3-17).

Figura 5.16 Simbiosis e intromisión del registro pictórico continuo y pictórico discreto.

Las conversiones más usuales que realizan los estudiantes son de Pictórica Discreta (PD) a Simbólica Numérica Fraccional (SNf) y viceversa. Se cree que esta conversión es casi unidireccional porque el estudiante lo utiliza para comprender el enunciado del problema, al igual que la representación verbal, para identificar los datos y luego proponer la solución utilizando la representación simbólica. Un caso paradigmático en el que se puede observa el proceso arriba descrito es el ilustrado en la figura 5.16 a). También se han encontrado protocolos en que se utiliza la representación verbal para enunciar o explicar la respuesta, con frases como *"Si el total es 7 de los cuales 3 son chicos estamos hablando de 3/7"* (4-16), o *"3/7 es la fracción que representa a 3 varones de un total de 7 amigos"* (4-20).

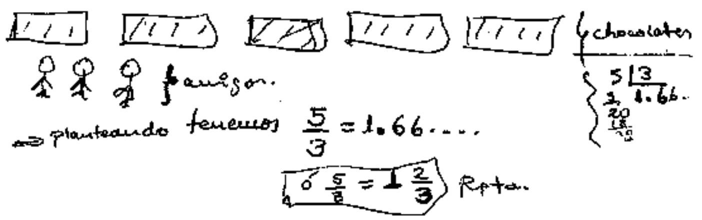
5.5.2.3 Las representaciones del significado cociente

La **fracción en su significado cociente** fue evaluada con la situación (S4) cuyo enunciado es *"Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?"*, las representaciones que utilizan los estudiantes son: verbal (V), pictórica continua (PC), simbólica numérica fraccional (SNf) y simbólica numérica decimal (SNd). La naturaleza del problema demanda el uso casi exclusivo de las representaciones simbólicas y de hecho, se ha constatado esta tendencia; además, se ha introducido la representación decimal que no es materia de tratamiento de nuestro estudio; sin embargo, se ha realizado un análisis tangencial de dicho evento.

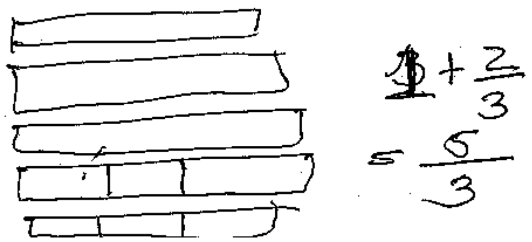
Las transformaciones al interior del registro simbólico se realizan primero, para efectuar la división el cociente indicado, segundo, para realizar suma de fracciones homogéneas y también, en la conversión de fracciones impropias en números mixtos. Se ha encontrado también casos de representaciones algebraicas como es el caso del estudiante (3-1). Un dato importante es la identificación de la división con la fracción $5 \div 3 \cong \frac{5}{3}$ tal como lo realiza el estudiante (3-8).

Se viene comprobando la presencia regular de la representación pictórica continua, aun en problemas como éste que evalúan la comprensión del significado cociente del número racional. Se percibe que el uso de los pictogramas continuos tiene doble utilidad indistintamente; primero, como auxiliar para comprender el enunciado del problema y segundo, como objeto sobre el cual se realiza transformaciones para encontrar la solución. Dentro de la primera clase se encuentra los estudiantes (3-10), (3-7), (3-6), (3-15), (4-1), (4-2), (4-4), (4-6), (4-8), (4,9), (4-12), (4-19), (5-1), (5-16), (4-1), (4-2), (4-4), (4-6), (4-8), (4-9), (4-12), (4-19), (5-1) y (5-16); y entre la segunda clase se ubica los estudiantes (3-11), (3-14), (3-13), (3-19), (3-21), (4-5) (4-7) (4-13), (5-15) y (5-18), situaciones que se puede observa en el anexo 7. La figura siguiente ilustra ambas situaciones:

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?



a) Pictogramas continuo y discreto para entender el enunciado del problema.
Tipo EPC: (3-10)



b) Pictograma continuo en el proceso de solución de problemas.
Tipo EPC: (5-15)

Figura 5.17 Dos utilidades del pictograma continuo y discreto.

La tendencia en las conversiones se esbozan en los siguientes sentidos.

Principales:

- De la pictórica continua a simbólica numérica fraccional (4-1), en este caso es evidente que el estudiante tuvo la necesidad de imaginar la barra de chocolate que debía ser dividido en tres.
- De pictórica discreta a simbólica numérica fraccional (5-1).

Secundarias:

- De pictórica continua y discreta a simbólica numérica fraccional y decimal (3-10) y (3.13). En este caso el estudiante manipula simultáneamente cinco tipos de registros (PC, PD, V, SNf y SNd).
- De verbal a simbólica numérica fraccional (5-10), en este caso se muestra una explicación verbal del proceso de razonamiento empleado para solucionar el ítem.
- De pictórica continua a simbólica numérica fraccional y verbal. Esta última usualmente es utilizado para enunciar la respuesta a manera de conclusión (3-19), (3-21).
- De pictórica continua a simbólica numérica fraccional y decimal simultáneamente (3-21) y (5-18). (véase el Anexo III)

5.5.2.4 Las representaciones del significado de medida

En las soluciones a la cuestión número 4 se encontró que los registros de representación utilizados son: el simbólica numérica fraccional, simbólica algebraica, verbal, pictórica continua y simbólica numérica decimal, en orden de prioridad.

Un rasgo relevante, es que a pesar que la cuestión en su enunciado presenta un gráfico de segmentos, se ha hallado estudiantes que necesitan el auxilio de representaciones pictóricas continuas para comprender la relación parte-todo que está implícito en el significado de medida. Es el caso de los estudiantes (3-9), (4-7) y (4-8).

Las transformaciones al interior de un sistema de representación son de naturaleza aritmética, se trata de simplificaciones; 9/12 = ¾ ó 6/12= ½, tal como lo realiza el estudiante (3-19). Las conversiones entre sistemas de representaciones se producen de pictórica continua a simbólica numérica y verbal, es el caso de los estudiantes (3-22) y (5-17). En algunos casos se ensaya razonamientos verbales antes de proponer representaciones simbólicas. Se ha advertido también el uso de representaciones pictóricas continuas adicionales como son los casos arriba señalados. Por la naturaleza del enunciado, en el que se denota con a y b los segmentos, se ha introducido la representación simbólica algebraica en las soluciones.

Los estudiantes (5-10) y (5-15) exhiben soluciones que transitan de la simple inspección de los gráficos de segmentos a las representaciones simbólicas algebraicas (*b/a=6/9=2/3)* y respuestas verbales como *"b es los 2/3 de a"*. Estos eventos se presentan con frecuencia en los demás estudiantes.

Un fenómeno que parece ser una regularidad es la dificultad que manifiestan los estudiantes para establecer la relación correcta, cuando parten de la acepción parte-todo continuo de cada segmento (9/12 y 6/12); en ningún caso se ha observado que el estudiante logra establecer la relación 6/9 ó 2/3. Tal como se suscita en los estudiantes: (3-4), (3-19), (3-21), (4,1), (4,12), (4-15), (4-18), (4-19), (5-4) y (5-7). Lo lógico sería establecer la relación $\frac{6/12}{9/12} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, pero todo los sujetos que proceden de esta manera no consiguen resolver con éxito la cuestión. De esta observación afirmamos que el significado parte-todo en los procesos de conversión entre los registros de representación (de pictórica continua a simbólica numérica fraccional o algebraica) interfiere en los razonamientos de los sujetos y los desvía hacia el error.

5.5.2.5 Las representaciones del significado de razón

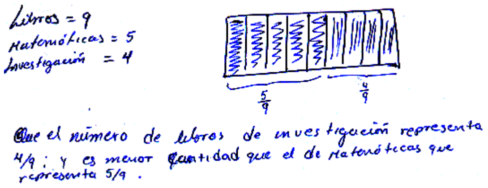
La evaluación del **significado de razón del número racional** se efectúa a través de la situación problemática *"5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?"*, los resultados muestran que, respecto al uso de las representaciones, los tipos de registro son: en orden de prioridad, simbólica numérica fraccional, verbal, pictórica discreta, pictórica continua, simbólica algebraica, simbólica numérica porcentual y diagrama de Venn. Como revelan los resultados cualitativos, en este asunto tenemos mayor variedad de representaciones; sin embargo, el más usual es el simbólico numérico fraccional.

A diferencia del caso anterior, en éste, el uso de las representaciones pictóricas se limita a ayudar al estudiante en la comprensión del enunciado del problema, más no en procesos heurísticos de solución de la situación matemática. Más bien, este fenómeno revela la interferencia del significado parte-todo en la interpretación de la razón entre el número de libros de investigación y de matemática. Es interesante encontrar que aun en problemas, como éste, no son necesarias las representaciones pictóricas continuas, pues éstas están presentes como se puede observar en la solución del estudiante (5-18). Por otro lado subsiste la interpretación parte-todo continuo en las respuestas erráticas, este fenómeno es una constante.

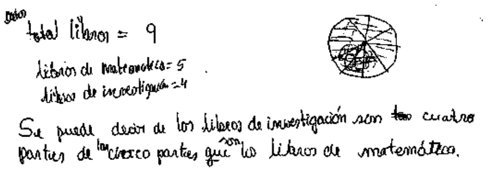
En los dos casos del diagrama de Venn (5-16) y (4-10), éste sirve para tratar de entender el enunciado del problema, mas no consigue su propósito, ya que, no ayuda a resolver la situación.

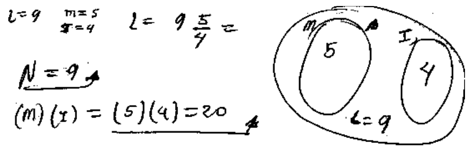
El número racional como "razón" 4/5 no representa la partición de ningún objeto, sino la relación que existe entre dos cantidades de magnitud, (número de libros de investigación y de matemática). La figura 5.18 c) compara los cardinales de dos conjuntos, pero no logra establecer la razón. La comparación se establece entre las cantidades que expresan el numerador y el denominador y, por tanto, el orden en que se citan las magnitudes que se están comparando es esencial (Gairín y Sancho, 2002). En este sentido la respuesta del estudiante (4-10) establece la razón inversa, es decir, 5/4. Si se pretende evaluar la interpretación de significado de razón de las fracciones serán válidos, pero, si se requiere evaluar la comprensión del enunciado del problema "*¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?*" la razón inversa en cuestión será considerada inválido.

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?



a) Pictograma continuo para comprender el enunciado del problema desde el significado parte todo. Tipo II: (5-18)





b) Pictograma continuo, interferencia del significado parte todo en el proceso de solución de problema. Tipo EPI: (3-15)

c) Diagrama de Venn. Comprende Tipo EPI: (4-10)

Figura 5.18 Tres casos de representaciones fallidas por interferencias de significado.

La fracción como índice comparativo entre dos cantidades de una magnitudes determinadas puede admitir las siguientes relaciones parte-parte, todo-todo y en la frontera de la diferencia se puede comprar el todo con la parte o la **parte con el todo** como una razón. En esta interpretación es importante fijarse en la bidireccionalidad de la comparación que se puede leer: *A* es *a/b* respecto a *B* ó *B* es los *b/a* con relación a *A*. Luego, podemos admitir como respuestas válidas las razones 4/9 que tratan de la razón parte-todo, lo que demostraría la incomprensión del enunciado del problema que exigen la razón entre el número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática. Es el caso de la mayoría de estudiantes que confunden la razón parte-todo con la razón parte-parte, que es la que se pide en la situación matemática.

Las características de las conversiones y transformaciones en las soluciones a este problema son similares a los anteriores con pequeñas variantes que se describen a continuación. Las transformaciones que se manifiesta en la solución del estudiante (3-5) muestra la fracción de fracciones y el uso de la regla *“multiplicar extremos con extremos y centros con centros”*, además de la simplificación.

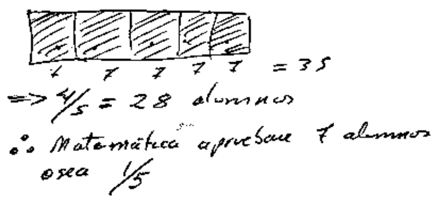
5.5.2.6 Las representaciones del significado de operado

Los registros de representación que se manifiestan en la solución a los problemas que evalúa e**l significado de operador** son diversos, pero esencialmente existe un predominio de la representación simbólica numérica fraccional (SNf), en tanto que las demás se exteriorizan con menor frecuencia. Entre éstas, se perciben la verbal, simbólica algebraica, pictórica continua, simbólica numérica decimal, simbólica numérica porcentual y diagrama de Venn.

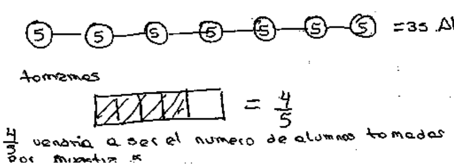
Las respuestas a la cuestión *“En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática?”* no revelan mayores dificultades, sino más bien, la mayoría de los estudiantes aplican de forma correcta el operador 4/5.

Un dato que contribuye a la hipótesis es la persistencia de la representación pictórica continua. Se ha encontrado resoluciones correctas y erráticas que se fundamentan en pictogramas de rectangulares y análogos. Veamos la figura:

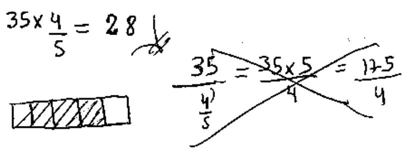
6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática?



a) Pictograma continuo en la solución de la situación. Tipo II: (3-13)



b) Pictograma continuo que interfiere en la correcta solución.. Tipo II: (4-12)



c) Pictograma continuo que no revela su utilidad en la solución. Tipo EPC: (5-11)

Figura 5.19 Tres casos de persistencia de los pictogramas continuos y análogos.

Los pictogramas parecen jugar dos roles, uno como elemento auxiliar para entender el enunciado del problema (figura 5.19 c) y el otro, como elemento que ayuda en la solución del problema (figura 5.19 a) y b).

Las conversiones que se manifestaron son las que muestra el estudiante (3-5) que recorre de un registro SNf a SNd y luego a SNp. Este caso explica la comprensión que ostenta el sujeto al asociar diferente registros simbólicos. En algunos casos enuncian la respuesta en forma verbal o explican el significado del operador con frases como *“4 de 5 aprueban”* o *“de cada 5 alumnos 4 aprueban matemática”*.

$$\frac{4}{5} \Longrightarrow 4 \div 5 = 0.8 \Longrightarrow 80\ \%$$

El significado de operador también está asociado al porcentaje. Se ha hallado soluciones que utilizan la *‘regla de tres simple’*, tal es el caso del estudiante (5-17) que identifica la unidad (1) con el 35 y 4/5 con la incógnita *x*; o el caso errado del estudiante (4-5), quien identifica 35 con el 100% y 4/5 con la incógnita. Más aun, luego de encontrar *x=2,2%* no se percata que 4/5 no puede ser el 2,2%, hecho que revela la falta de capacidad para estimar la magnitud del número de alumnos aprobados asociado a la fracción 4/5 (véase el Anexo III).

5.6 FENÓMENO DE LA INTERFERENCIA ENDÓGENA DE SIGNIFICADOS DEL NÚMERO RACIONAL

Con el objeto de mostrar la potencialidad práctica de la propuesta interpretativa en el escenario de valoración considerado, se lleva a cabo un estudio empírico descriptivo de carácter exploratorio, que tiene como propósitos fundamentales evidenciar y caracterizar el fenómeno de interferencia en la elección y uso de conocimientos en el caso concreto de la fracción y sus significados, además de poner en manifiesto aspectos relevantes de la comprensión de este conocimiento matemático a través de los sucesos significativos identificados en la descripción de dicho fenómeno.

El análisis e interpretación de resultados en el ámbito de la comprensión de los significados de la fracción muestra los resultados obtenidos en la experimentación, los cuales nos permiten profundizar en los dos aspectos principales ya mencionados vinculados con la comprensión de la fracción manifestados en su elección y empleo: la extensión de los conjuntos personales de situaciones de los participantes, a través del análisis de interferencias externas y la naturaleza del vínculo situación-fracción, mediante el estudio de interferencias internas. Los eventos relevantes identificados en cada una de estas facetas así como en la relativa a la adecuación del uso del significado de la fracción que le es propio a cada situación (aspecto este elemental en el proceso valorativo) son interpretados en términos de comprensión, siguiendo el modelo presentado.

Tabla 5.8

Frecuencia Absoluta y Relativa Porcentual de Respuestas Dadas por Categorías

Categorías de respuestas	S1	%	S2	%	S3	%	S4	%	S5	%	S6	%	TOTAL	%
Empleo Propio														
Correcto	53	88	47	78	36	60	31	52	8	13	38	63	213	59
Incorrecto	4	7	7	12	12	20	10	17	3	5	2	3	38	10
Interferencia														
Externa o Exógena	2	3			6	10	3	5	1	2	7	13	19	5
Interna o Endógena	1	2	4	7	4	7	14	23	44	73	9	13	76	21
Dudosa			2	3	2	3	2	3	4	7	4	7	14	4

Elaboración propia.

La tabla 5.8 muestra la frecuencia de las respuestas dadas a las seis tareas del cuestionario distribuida por categorías. De una primera observación de las puntaciones totales se desprende que en las situaciones planteadas hubo un empleo mayoritario de la fracción sobre otros conocimientos. El establecimiento general del vínculo 'situación-fracción' y el uso preferencial dado a la fracción en situaciones no-exclusivas se interpretan precisamente como acciones favorables que respaldan una valoración preliminar positiva de la comprensión de los participantes en lo referente a la extensión de sus conjuntos personales de situaciones.

5.6.1 Perspectiva Cuantitativa de las Interferencias entre Significados

La tabla 5.9 presenta los hallazgos de las interferencias entre significados del número racional, observados en los protocolos de solución de los seis problemas de la prueba sobre comprensión del significado del número racional, que tienen el objetivo de evaluar la comprensión de las interpretaciones o significados del número racional en su representación fraccional. Estudio aparte merecen las respuestas equivocadas que obedecen a otras causas y que rebasan los limites de la presente investigación.

Tabla 5.9
Número de Casos de Interferencia Endógena entre Significados.

Significados interferentes	Interferencias del significado						
	Parte-todo continuo S 1	**Parte-todo discreto S 2**	**Cociente S 3**	**Medida S 4**	**Razón S 5**	**Operador S 6**	**Total**
Parte-todo			4	12	39	6	61
Cociente	1						1
Medida							
Razón		4		2	5*	3	14
Operador							
Total	1	4	4	14	44	9	76

* Se trata de interferencia interna de razón sobre razón del tercer tipo (ver numeral 5.4.2.5) Razón del todo respecto a la parte.
Elaboración propia.

La tabla muestra que las interferencias del significado parte-todo continuo y parte-todo discreto sobre los significados cociente, medida razón y operador son los más usuales. Queda evidenciado que los significados parte-todo continuo y discreto, juntos, suman 61 casos lo que prueba que estos significados interfieren en la interpretación de los significados cociente, medida, razón y operador, y de forma más aguda en el significado razón. Es interesante apuntar también que los significados de medida y operador no actúan como interferentes, además que, los significados cociente y razón son incidentales.

5.6.2 Interferencia Interna: Naturaleza de los Vínculos Fenómeno-Epistemológicos de la Fracción

De acuerdo con nuestro modelo, además del establecimiento del vínculo 'situación-fracción', que garantiza la superación del fenómeno de interferencia externa ya referido, la siguiente condición para la comprensión establece el empleo de aquel significado de la fracción que le es propio a cada situación. El estudio empírico realizado pone de manifiesto que esta condición no siempre se cumple, surgiendo entre los participantes el fenómeno denominado de *Interferencia Interna*. Los resultados recogidos en la tabla 5.8 posibilitan apreciar la presencia en el desempeño de los estudiantes de dicha interferencia con un total de 76 respuestas de esta naturaleza. En la tabla 5.9 se observó que el significado “parte-todo” interfiere en los significados de “cociente”, “medida”, “razón” y “operador”. De todos los anteriores se encontró, en términos generales, que el significado de “razón” es el más interferido por el significado “parte-todo”, en tanto que el menos afectado es el significado de operador. Con objeto de profundizar en esta categoría de respuesta, se detalla en dicha tabla los distintos casos de interferencias entre significados de la fracción junto con las frecuencias absolutas de los mismos registradas en la prueba. Se observa que en esta oportunidad llegan a identificarse ocho casos diferentes de interferencia interna producidos entre los significados:

(a) P*arte-todo* sobre el resto de significados.
(b) C*ociente* sobre *parte todo continuo*.
(c) *Razón* sobre *parte-todo discreto, medida* y *operador*.

En la actuación de los alumnos se distinguen adicionalmente tres variantes básicas de interferencia interna en la relación entre posibles iniciativas de uso planteadas en la elección de la fracción:

Variante 1. Integración de los significados interferente(s) e interferido a través de su empleo conjunto en la resolución.

Variante 2. Consideración independiente de distintos significados para su uso en la tarea.

Variante 3. Preferencia no siempre acertada en el uso de unos significados sobre otros. Este caso se concibe como el escenario genuino de conocimientos enfrentados en su elección y reemplazados en su empleo.

En el ejemplo A (véase figura 5.20) se muestra un caso de interferencia interna de los significados *cociente* y *parte-todo* sobre *operador* de otro alumno de quinto curso que emplea al inicio de la resolución el par de significados *cociente* y *operador* en forma colaborativa (variante 1), y, seguidamente, el significado *parte-todo* con independencia de los dos anteriores (variante 2). Por su parte, el estudiante del tercer curso del ejemplo B, también evidencia una interferencia interna del significado *razón* sobre *operador,* aunque en esta ocasión, el primero reemplaza al segundo (variante 3). Variantes como éstas, en las acciones de los alumnos, revelan matices complementarios en la comprensión de los significados de la fracción que permanecen ocultos en el análisis, tanto de las interferencias externas como de la adecuación en el uso del significado propio en cada situación.

6) *En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?*

Ejemplo A

$35\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{7}$

40 | 7

0,571...

-Aprueban matemática los $\frac{4}{7}$ alumnos de matemática lo cuál no existe una persona siempre vale una unidad no 0,571... (no podemos partir a las personas).

-La fracción significa que partimos al total de alumnos en 5 grupos iguales y tomamos 4 grupos.

Ejemplo B

de 35 alumnos

$\frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{28}{35}$ aprueban

⇒ se podría decir que 28 alumnos aprueban matemáticas.

⇒ que de cada 5 alumnos, 4 alumnos aprueban matemática.

Figura 5. 20 Ejemplos de interferencia interna en sus distintas variantes

En conclusión, las interferencias internas como las identificadas, constituyen indicadores de primer orden de las particularidades de los posibles vínculos que los participantes establecen a nivel interno, entre los significados de la fracción en su utilización. De hecho, estas interferencias facilitan la caracterización de la estructura fenómeno-epistemológica de los distintos conjuntos personales de situaciones vinculados a los significados de la fracción. Precisamente, la amplitud y complejidad de la red de interferencias internas entre significados, manifestada en cada caso, emergen como criterios fundamentales para valorar la comprensión de los estudiantes y establecer diferencias entre ellos, como las expuestas en los últimos ejemplos.

A continuación se describe las interferencias de seis casos típicos de interferencia denominados internas:

5.6.2.1 Interferencia del significado <<cociente en parte-todo continuo>>

Aunque es el menos frecuente, se encontró dos casos de interferencia del tipo "cociente en parte-todo continuo". Los casos de los estudiantes (4-4) y (4-7) revelan que en la interpretación resolutiva interfiere el significado de cociente en el razonamiento del estudiante; primero, se utiliza el significado parte-todo "Si tiene Ud. cuatro trozos y tomas tres, tendrás los 4/3 de una barra de chocolate", pero seguidamente se observa la intromisión del significado cociente en la frase "... 4 enteros divididos entre 3 partes de un total". Veamos la figura que ilustra la situación de interferencia:

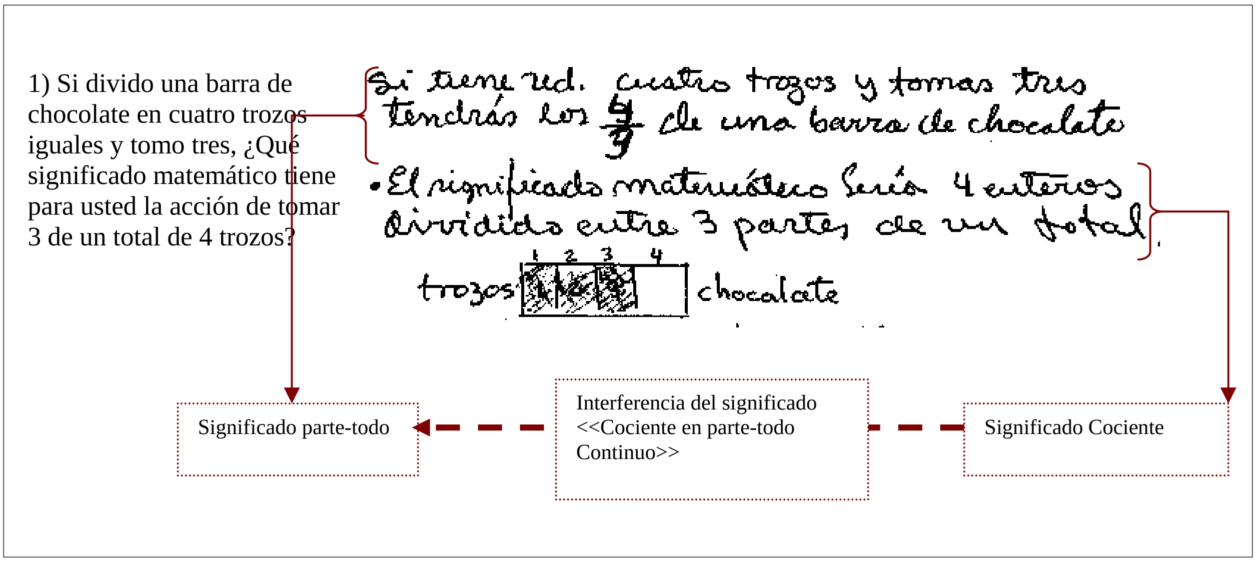


Figura 5. 21. Interferencia del significado <<cociente en parte-todo continuo>>. (4-4)

5.6.2.2 Interferencia del significado <<razón en parte-todo discreto>>

Es relevante encontrar que el significado de razón interfiera en la solución del problema que corresponde al significado parte-todo discreto en cuatro casos. De estos, el caso más ilustrativo es del estudiante (3-10), que a diferencia de los demás que se limitan a escribir 4/3, aporta argumentos que sustentan su razonamiento. Así, a pesar de reescribir la interrogante "Qué fracción de grupo de amigos son chicos?", luego de establecer algunas igualdades, concluye "la fracción de chicos es igual a los cuatro tercios de las chicas". Esta última proposición denota una interpretación de razón del número racional. Como se analiza en la siguiente ilustración:

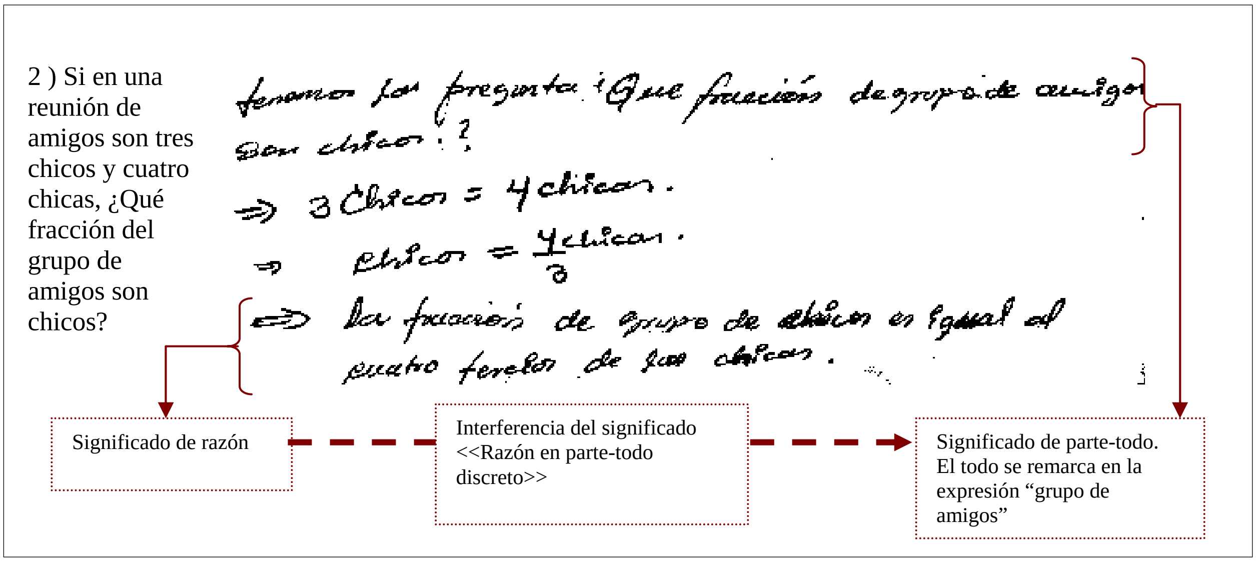


Figura 5. 22. Interferencia del significado <<razón en parte-todo discreto>> (3-10)

5.6.2.3 Interferencia del significado <<parte-todo continuo en cociente>>

Cuando se propone la cuestión con significado de cociente, se encontró la interferencia del significado parte-todo continuo. En los tres grupos de estudiantes se suscita el fenómeno de la interferencia. Así, en tercer grado los casos más ilustrativos son: (3-6) y (3-7). En el primero, el estudiante asume una unidad, un todo, el cual es dividido en tres, de los cuales sombrea tres, este procedimiento configura la presencia del significado parte-todo continuo que interfiere en la solución del problema que tiene el significado de cociente en su enunciado. En el segundo, de la misma manera divide un todo en cinco parte y concluye que a cada amigo le toca un quinto. En ambos casos está presente el significado parte-todo muy enraizado en los procedimientos de solución. Este fenómeno se manifiesta en el uso de la representación pictórica.

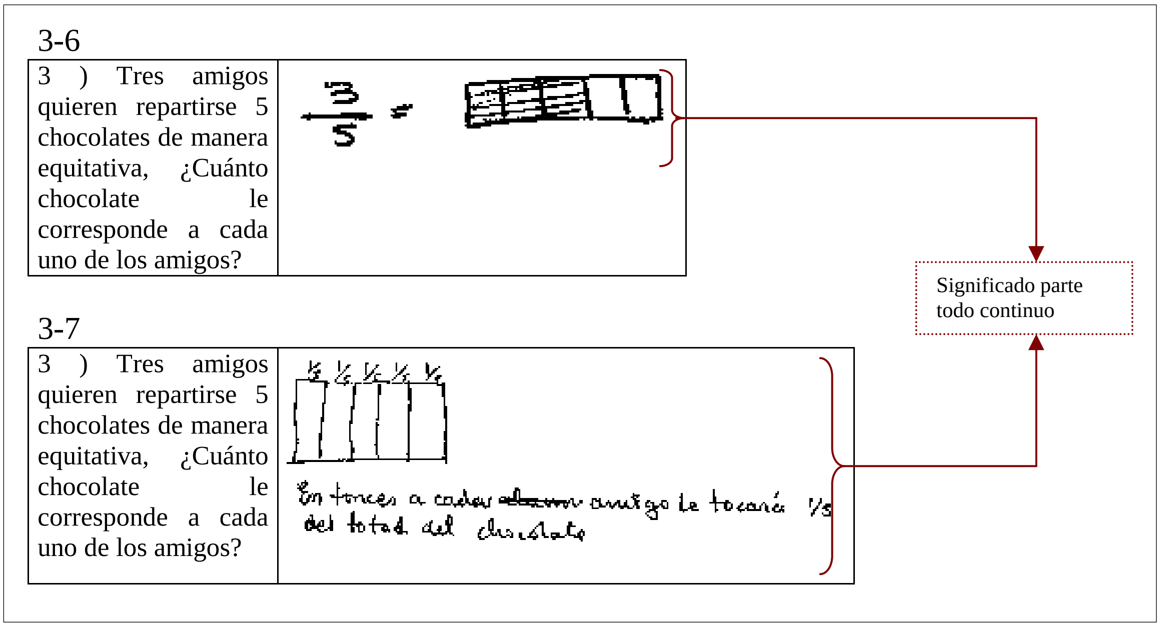


Figura 5. 23 Interferencia del significado <<parte-todo continuo en cociente>>

Los restantes casos que indican como respuesta que a cada amigo le corresponde 3/5 de chocolate, por la semejanza de la respuesta con las anteriores, se ha asociado a este tipo de interferencia, pero, esta suposición sólo es una posibilidad con serias limitantes de aserción. Más adelante, se presenta una descripción con un intento de clasificación de las respuestas que no corresponde al tipo de interferencias. Es claro, que el propósito de la investigación no es hacer un estudio de las causas de los errores cometidos por los estudiantes, pues estas intenciones rebasan los objetivos del presente informe de investigación.

5.6.2.4 Interferencias en el significado medida

En la solución al problema que en su enunciado posee la esencia del significado del número racional como medida, se ha hallado que las interferencias son múltiples, Se encontró además de las interferencias del significado parte-todo, que también, los significados cociente y de razón interfieren en los razonamientos de solución. Así el caso del estudiante (3-21) muestra la interferencia simultánea de los significados parte-todo y razón; primero, interpreta cada segmento respecto al resto de la recta como parte-todo, y luego, plantea una relación de razón, veamos la figura.

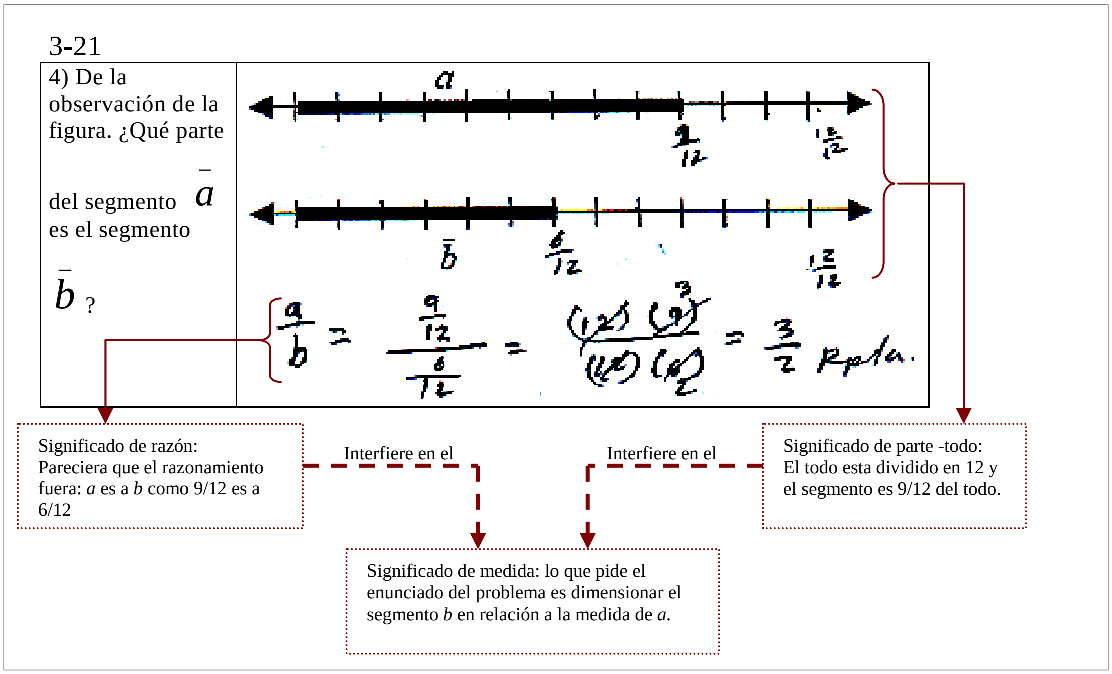


Figura 5. 24 Interferencias en el significado medida . (3-21)

El estudiante (5-8) en la solución del problema aplica dos veces el significado de razón, primero las doce subdivisiones es a nueve el tamaño del segmento, y luego, la razón 9 es a 6, de lo que se deduce que el significado de razón está interfiriendo en la interpretación de medida de la situación problemática, como se ve en la figura:

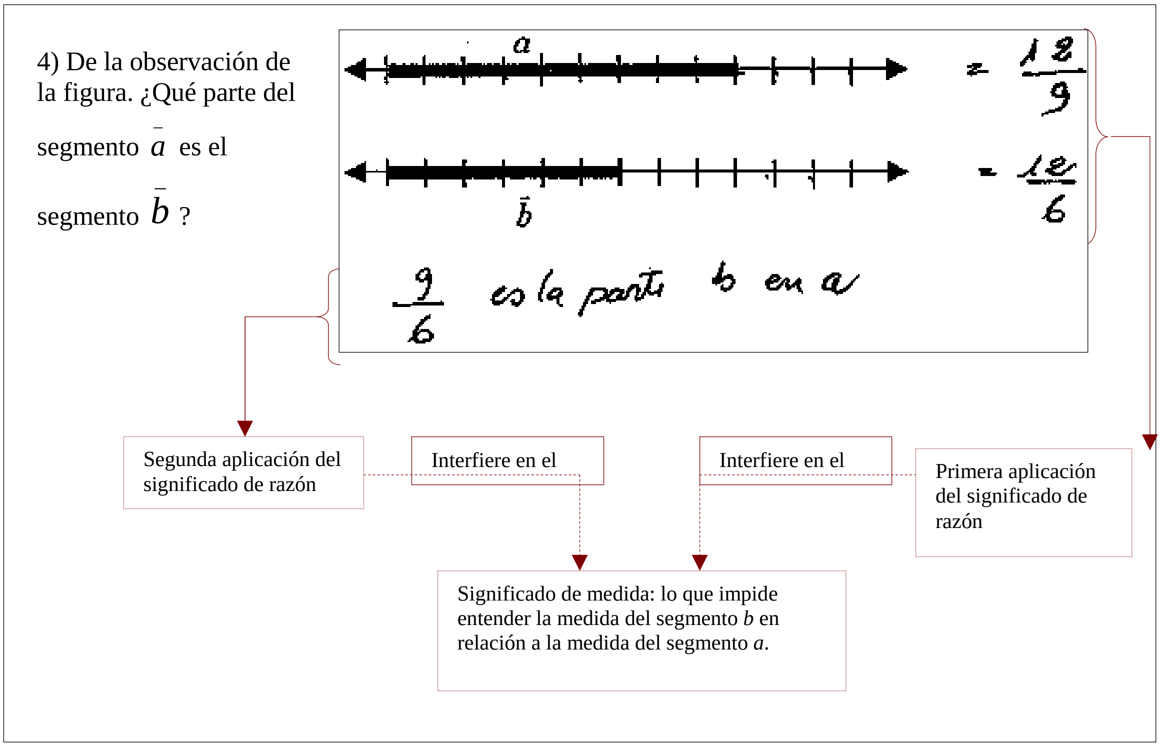


Figura 5. 25 Interferencias en el significado medida . (5-8)

5.6.2.5 Interferencia del significado <<parte-todo en razón>>

La interferencia del significado parte-todo discreto en el significado de razón es especial, porque las observaciones muestran un alto número de casos de este tipo. En los tres grupos de estudiantes se ha encontrado reiteradas veces que en cada uno de ellos se confunde la interpretación de la interrogante "¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?" pues no se ha tenido cuidado en entender la frase "*...respecto al ...*". Se parte de la suposición de un número total de libros que es nueve, y no se percatan de la razón que existe entre el número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática el cual es de 4/5.

Un caso paradigmático de interferencia del significado parte-todo continuo en el significado de razón del número racional es el mostrado en la solución del estudiante (5-18). Él considera el todo representado en un pictograma de los cuales sombrea de forma diferente 5 y 4 partes para indicar el número de libros de matemática y de investigación, la frase "*...respecto al..*" la interpreta como una relación de orden, de ahí que asevera que el número de libros de investigación (representado por 4/9) es menor en cantidad respecto al de matemáticas (representado por 5/9). Véase la figura:

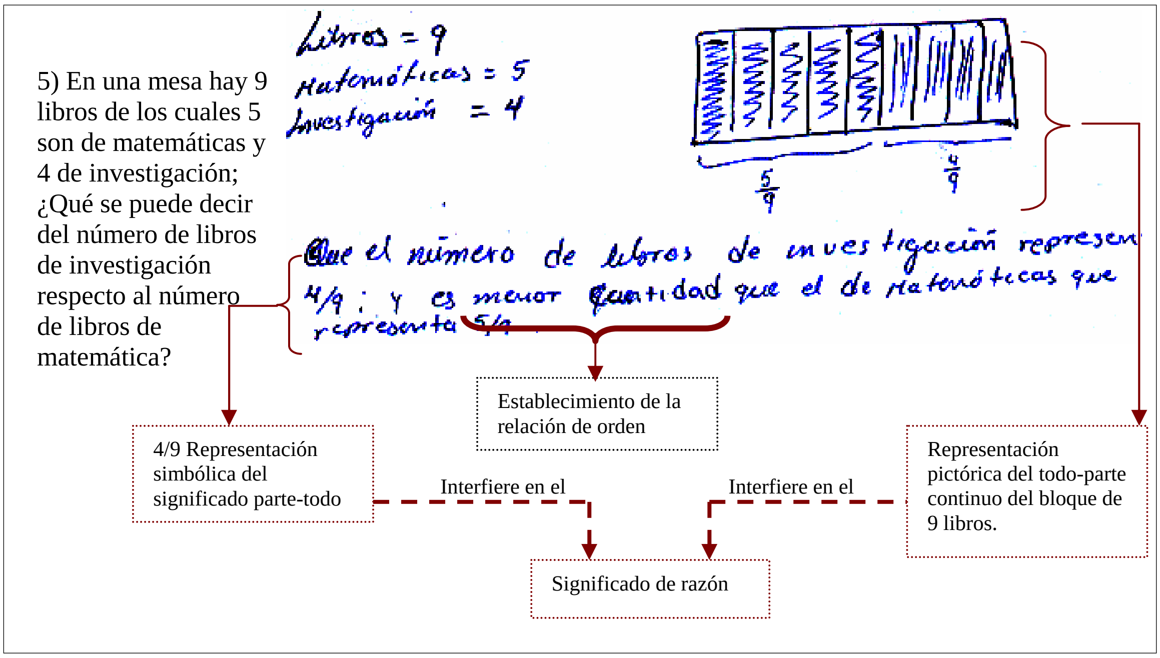


Figura 5. 26 Interferencia del significado <<parte-todo continuo en razón>> (5-18)

Es evidente que la frase *"...respecto al ..."* ha sido interpretado como la relación de orden del número de libros de investigación menor al número de libros de matemática, esta observación se ha mostrado como una constante en las respuestas de los estudiantes. El caso del estudiante (3-21) lo ratifica:

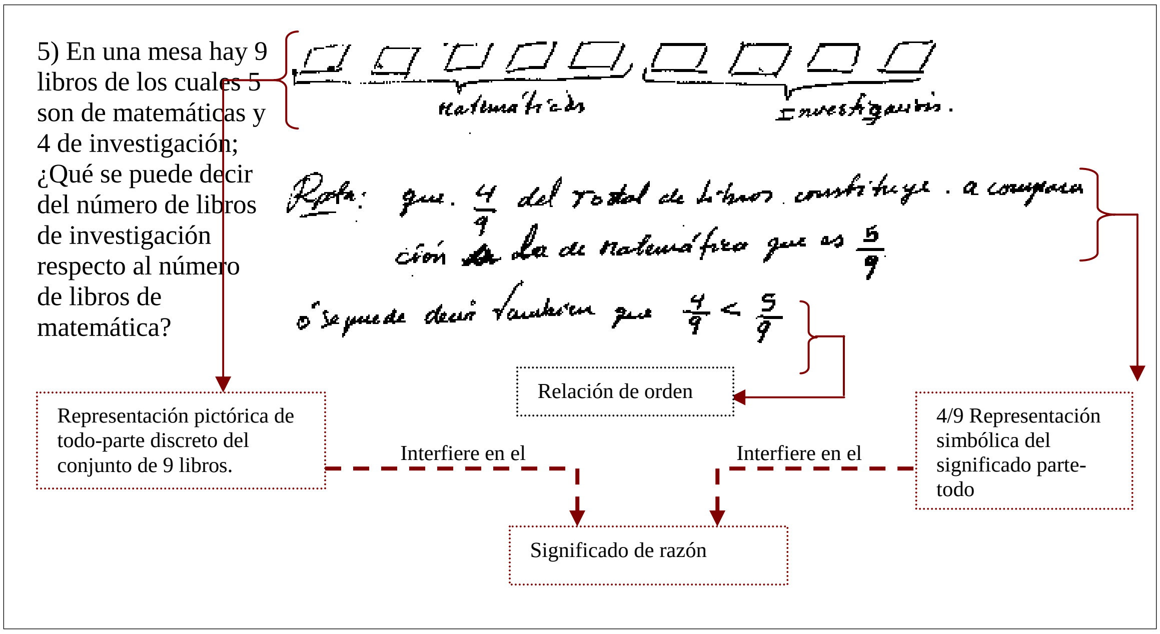


Figura 5. 27 Interferencia del significado <<parte-todo discreto en razón>> (3-21)

La respuesta del estudiante (4-7) merece un estudio particular porque es un caso *sui géneris*, ya que además de interpretar desde el significado parte-todo, hace una interpretación que escapa a toda lógica. Si la expresión señalada con la flecha de la izquierda fuera “ de nueve libros cinco son de matemática, es decir 9 es a 5 (9/5)” estaríamos frente a una interpretación de razón, sin embargo la respuesta del estudiante dice “... de 9 libros ... 9/5 (1) es de matemática”. Más abajo interpreta con una fracción impropia el número de libros de matemática y de investigación.

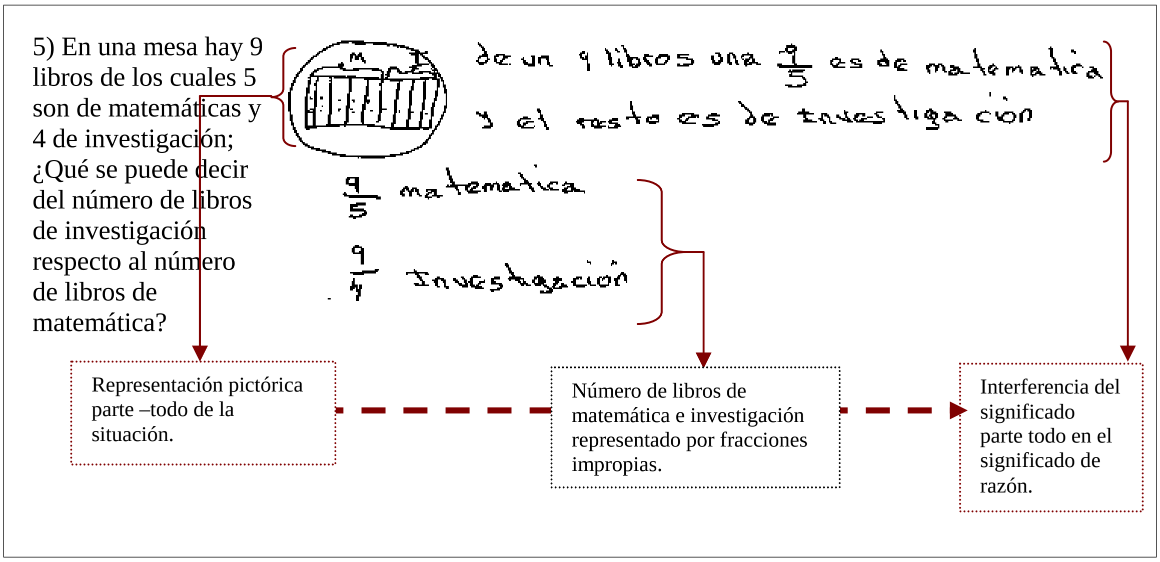


Figura 5. 28 Interferencia del significado <<parte-todo en razón>> (4-7)

5.6.2.6. Interferencia del significado <<parte-todo continuo en operador>>

Este tipo de interferencia se ha encontrado en tres estudiantes: (3-17), (4-2) y (4-12). El estudiante (3-17) a pesar de comprender el significado de operador como se desprende de la frase que escribe “...esto quiere decir que de cada 5 – 4 aprueban”, sin embargo, en su razonamiento está presente la intromisión del significado parte-todo continuo concretizado en el pictograma de la barra dividida en cinco y del cual se sombrea cuatro. Esta respuesta del estudiante revela la fuerte interferencia de las representaciones pictóricas del significado parte-todo continuo, que conduce a una interpretación equivocada del operador del problema.

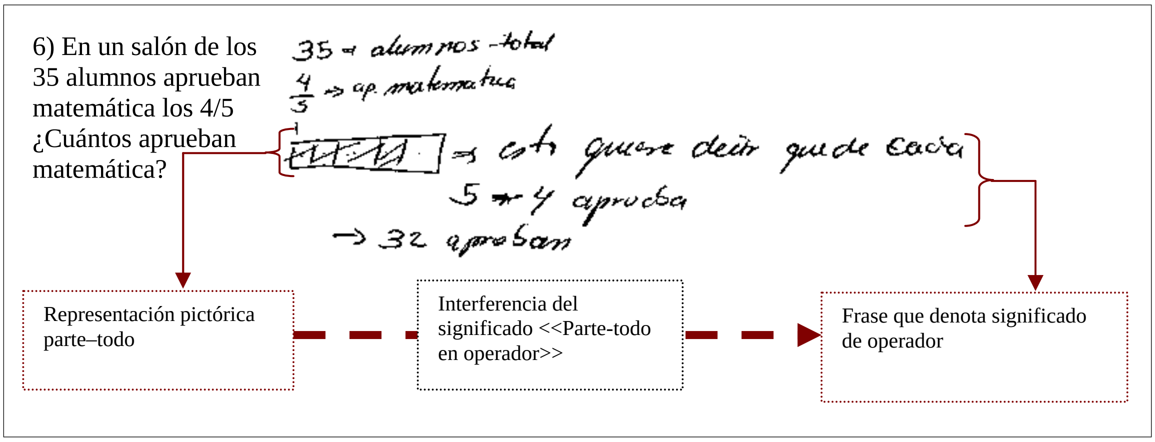


Figura 5. 29 Interferencia del significado <<parte-todo continuo en operador>> (3-17)

Los estudiantes (4-2) y (4-12) tienen razonamientos similares, pero el primero es más revelador. El estudiante, efectivamente, utiliza el 5 como operador y efectúa la división como debe ser; seguidamente, grafica el pictograma correspondiente al significado parte-todo continuo, un todo dividido en 7 partes y no en 5 como indica el operador. Este es un primer error de conversión de la representación simbólica a pictórica ya que el pictograma recoge 4/5 es decir 20, una segunda equivocación asume el significado parte-todo de forma incorrecta.

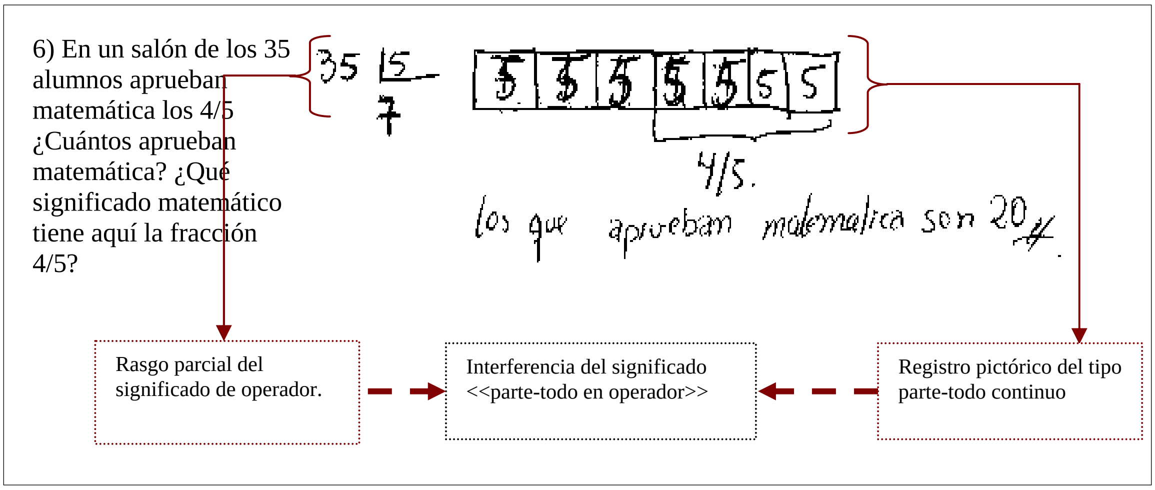


Figura 5. 30 Interferencia del significado <<parte-todo discreto en operador>> (4-2)

5.7 INTERFERENCIA EXTERNA: EXTENSIÓN DE LOS CONJUNTOS PERSONALES DE SITUACIONES ASOCIADOS A LA FRACCIÓN

La tabla 5.8 muestra la frecuencia de respuestas de la categoría de respuesta *Interferencia Externa*. En él se pone de manifiesto el hecho de que algunos profesores en formación no llegan a establecer el mencionado vínculo 'situación-fracción' y, por tanto, a reconocer la situación como perteneciente al conjunto genérico de situaciones asociado a la fracción. Se puede considerar entonces que sus conjuntos personales de situaciones se muestran reducidos en esta parcela fenomenológica respecto a los de aquellos estudiantes que sí superaron la *Interferencia Externa* en la prueba, lo que se interpreta a su vez como una limitación en la comprensión de la fracción. Un ejemplo de este hecho se aprecia en un alumno de quinto curso quien no dio muestras suficientes de elección y empleo de la fracción en dos de las seis situaciones planteadas, (S3 y S5) revelando, por ello, una comprensión reducida en los significados *cociente* y *operador*. En el primer caso se aprecia que la resolución viene dada mediante la aplicación de otro conocimiento matemático como es el algoritmo estándar escrito para la división de números naturales de uso extendido en el ámbito hispanoamericano. En el segundo, resulta evidente la ausencia de uso de todo significado de la fracción.

En otro orden de cosas, la respuesta generada por este alumno en S3, no permite observar su comprensión de la fracción pero sí es indicadora del algoritmo mencionado, pues alude directamente a la cuestión de la relación entre comprensión y competencia matemática en nuestro modelo. En términos específicos, el registro escrito muestra un estudiante competente ante la situación planteada por decidir emplear un procedimiento adecuado a su conveniencia y ajustado a los requerimientos del problema[3], pero al mismo tiempo, privado de comprensión de la

[3] Tomamos como referencia genérica la idea de competencia matemática como capacidad del individuo para resolver situaciones prácticas cotidianas, utilizando para este fin conceptos y procedimientos matemáticos. El énfasis se sitúa en el proceso y en la actividad, aunque también en los conocimientos. Entre otros aspectos, la competencia matemática entraña, en

fracción por no haber, presuntamente, identificado la tarea como perteneciente a su esfera fenómeno-epistemológica. En consecuencia, de nuestro modelo, se desprende una distinción entre comprensión y competencia matemática fundamentada no tanto en diferencias de carácter funcional como sucede en otras propuestas (Godino, 2002c); sino más bien, en la interpretación referida a través del ejemplo discutido.

En la tercera situación de la figura 30 observamos la interferencia externa (IE) de la operación resta de fracciones, en este caso se considera la resta como un elemento externo a la comprensión del significado de medida. Sin embargo, también se puede ver la presencia de una interferencia interna (II) del significado parte-todo cuando se aplica a cada segmento. En este caso el estudiante (4-18) primero, interfiere el significado parte-todo en la situación de medida; luego, procede ha realizar una diferencia, como se puede ver en la figura. Este último caso es un ejemplo de la complejidad de la tarea de clasificar las respuestas, ya que en algunas situaciones se percibe esta doble dimensión de la interferencia en la respuesta de un individuo.

La tabla 5.10 resume los diferentes casos de interferencias exógenas; de las nociones matemáticas interferentes: porcentaje, el algoritmo de la resta de fracciones, el cociente decimal, aproximación algebraica a la situación y la regla de tres simple sobre los significados del número racional. Estos casos de interferencia suman 19, de los cuales el más frecuente es la interferencia del cociente decimal sobre el significado de cociente de la fracción. Eventos que se presentaron de forma particular, pero que no acredita importancia tanto como la interferencia interna, que es objeto central de esta investigación.

---

distintos grados, la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento y representación.

Tabla 5.10

Número de Casos de Interferencia Exógena

Nociones matemáticas interferentes	Interferencias del significado						
	Parte-todo Continuo S 1	**Parte-todo Discreto S 2**	**Cociente S 3**	**Medida S 4**	**Razón S 5**	**Operador S 6**	**Total**
Porcentaje	1					1	2
Sustracción	1			3		2	6
Cociente decimales			6			1	7
Algebraica					1		1
Regla de tres simple						3	3
Total	2	0	6	3	1	7	19

Elaboración propia.

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?

5 |3
-20 1,66.
18
2

A cada uno le toca a 1 chocolate Mas el 0,66.. parte de un chocolate.

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de ***investigación respecto al número de libros de matemática?***

que el # de Libros de Investigación es menor al # de Libros de Matemática.

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento **a** *es el segmento* **b***?*

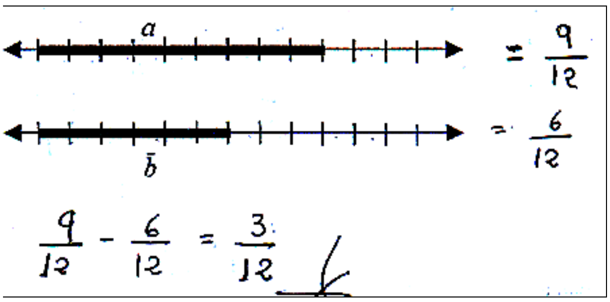


Figura 5. 31 Manifestaciones del fenómeno de interferencia externa

CONCLUSIONES

1. INTRODUCCIÓN

La investigación se ha ocupado en evaluar específicamente la naturaleza de la comprensión de los diferentes significados de los números racionales positivo en su representación fraccional que poseen los estudiantes de educación matemática y computación de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno. Este es un estudio evaluativo de la comprensión de los significados del número racional positivo, asociado a los sistemas de representación.

Concluido el estudio, absolvemos las respuestas referentes a las preguntas iniciales del trabajo, basado en el análisis e interpretación de la información teórica e empírica. En esta sección, se explica los hallazgos más importantes y relevantes de la investigación, cuyos datos, están organizados según el enunciado de la problemática.

Para el logro del objetivo general, estudiar la naturaleza de la comprensión del concepto y significados del número racional, además de las representaciones que conoce y utiliza el estudiante, se ha efectuado dos estudios empíricos; primero, se ha realizado un análisis de los libros de texto de matemática sobre números racionales, segundo, una evaluación cuantitativa y cualitativa de la comprensión de los significados del número racional, basado en la aplicación de una prueba sobre situaciones matemáticas que comprende sus seis significados.

2. CONCLUSIONES

A continuación se expone los resultados y conclusiones más importantes de las dos etapas de investigación. La exposición está organizada en los siguientes apartados: en el (2.1) conclusión general; en el apartado (2.2) los resultados principales y conclusiones del análisis didáctico como consecuencia del estudio teórico; y en el (2.3) se exponen los resultados y conclusiones del análisis de los significados del número racional de los libros de texto; finalmente, en el (2.4) se exponen resultados principales y proposiciones concluyentes del estudio empírico sobre la compresión de los significados del número racional positivo.

2.1 Conclusión General

La conclusión medular del estudio está referida a la comprensión de los significados del número racional positivo, comprensión que adolece del fenómeno que hemos denominado "Interferencia del significado parte-todo", en la interpretación de los significados de medida, razón, cociente y operador, a los que hemos llamado periféricos o subsidiarios. La revisión de los antecedentes, el estudio preliminar de los libros de texto, el análisis de las soluciones escritas a las seis cuestiones de la prueba que evalúan la comprensión de los significados: parte-todo continuo, parte-todo discreto, cociente, medida, razón y operador, permiten concluir que, **la comprensión de los significados del número racional se caracteriza por una acentuada interferencia del significado parte-todo en la interpretación de los demás significados y una preeminencia de las representaciones simbólicas (fracción y decimal) en la solución de las cuestiones**.

En la búsqueda de respuestas a la problemática, se ha propuesto tres objetivos específicos que se discuten en los siguientes numerales.

2.2 Conclusiones del Análisis Didáctico

La respuesta a la interrogante ¿Cuál es el estado actual del conocimiento sobre la comprensión y registros de representación de los significados del número racional positivo?, admite como respuesta las **conclusiones del Análisis Didáctico** que a continuación se presenta:

- Duval (1995), afirma que no se puede tener comprensión matemática si no se distingue un objeto matemático de su representación. Enfatiza la relación entre la conceptualización y los registros de representación. Además, sostiene que el aprendizaje implica actividades cognitivas como la formación de representaciones, transformaciones y conversiones o traducciones entre sistemas de representación.
- Escolano, R. (2004), sostiene que el significado parte-todo de la fracción no tiene sus orígenes en las necesidades humanas, más bien, es el resultado de la práctica educativa, y lo ubica entre los recursos didácticos que permite eludir las actividades de medida con objetos tangibles que generan dificultades en la gestión del material, además, el significado parte-todo permite abreviar los períodos de instrucción. En consecuencia, Escolano coincide con nuestro estudio, en el sentido que, la enseñanza de la fracción se sustenta en el significado casi exclusivo de la relación parte-todo, así mismo, se añade a esta afirmación el hecho que los libros de texto intentan justificar las relaciones y propiedades del número racional, desde este único significado.
- La fenomenología didáctica es la relación noumenon y phainomenon, en un proceso de enseñanza aprendizaje. Freudenthal, sostiene que el material necesario para una fenomenología didáctica de los números racionales será el conocimiento matemático de los números racionales, sus aplicaciones, su historia, un análisis de libros de texto y la experiencia de los didactas en el desarrollo de los números racionales en la mente de los estudiantes; finalmente, las indagaciones sobre los procesos reales de la construcción de los números racionales y la adquisición de conceptos matemáticos relativo al objeto en cuestión.
- Diferentes antecedentes de investigación como: Rodríguez (2005), León (1998), Escolano y Gairín (2005), Escolano (2001), Dos Santos (2005), Amorin, Flores y Moretti (2005), Llinares y Sánchez (1997), Gairín (1999), Ferreira (2005); todos ellos coinciden en afirmar que el aprendizaje de las fracciones, como representante del número racional es complejo y está íntimamente relacionado con sus significados. Estos investigadores proponen diferentes perspectivas para

su abordaje en la enseñanza desde algún significado en particular, o puntualizando que la interpretación parte-todo se ha posicionado como significado principal para la introducción del número racional en el sistema didáctico.

- La revisión histórica de la génesis del número racional revela que sus orígenes se localizan en los significados de medida y razón, así, los babilonios, egipcios y chinos, por su necesidad de realizar mediciones cada vez más precisas, tuvieron la brillante idea de fraccionar la unidad de medida en subunidades, originando de esta manera fracciones, por ejemplo, las fracciones unitarias de los egipcios, en tanto que ya en la antigua Grecia se discutía la naturaleza de 'ente numérico' del par ordenado llamado razón.
- Gallardo, J. (2004) afirma que la comprensión se ha de llevar a cabo a partir de la información que proporcionan las acciones observables de los sujetos y las respuestas que emiten a las situaciones especiales preparadas para ello. Estos comportamientos observables, se cree que son el único medio que tiene el investigador para hacer afirmaciones y conclusiones, relacionados con la comprensión del conocimiento matemático.

2.3 Conclusiones del Análisis de Libros de Texto

Para la consecución del segundo objetivo específico, capítulo IV, se ha realizado un estudio interpretativo del contenido *concepto de número racional* en los libros de texto de matemática, del primero y en algunos casos del segundo grado, del nivel de educación secundaria del sistema educativo peruano. Los resultados y conclusiones más relevantes se puntualizan a continuación.

Conclusiones del Período A "Tradicional":

- El significado de número racional que se utiliza es el de parte-todo, al que llaman "parte alícuota de la unidad". Describen la necesidad de extender el conjunto de los números enteros a los racionales, sin aprovechar la potencialidad del significado cociente indicado, que subyace en esta justificación.

- Entienden que el número racional es la unión del conjunto de los números enteros y de números fraccionarios, sin llegar a definir formalmente una fracción como un representante de los números racionales.
- Los sistemas de representación predominantes son la simbólica numeral seguido de sus variantes, algebraica y verbal. En tanto que, las gráficas pictórica y gráfica en la recta numérica son utilizadas para explicaciones preliminares o introductorias, mas no en el desarrollo temático.
- Respecto a las transformaciones, como actividad cognitiva asociada a la representación de significados, al interior de la representación simbólica son las más frecuentes, éstas son del tipo: transformación de fracciones impropias a números mixtos, simplificación y ampliación de fracciones, homogenización de fracciones heterogéneas utilizando mínimo común múltiplo. Todas estas transformaciones están incluidas como ejercicios al final de la unidad temática, con el propósito de adiestrar al educando para el aprendizaje de algoritmos de operaciones básicas con fracciones.
- Respecto a las conversiones como actividad cognitiva, se encontró que la representación simbólica numérica fraccional es el centro de conversión, el cual se vincula con la representación verbal, algebraica, pictórica y gráfica en la recta numérica.

Conclusiones del Período B “Matemática Moderna”:

- La introducción del conjunto de los números racionales se sustenta en la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros, utilizando las nociones de equivalencia y clase de equivalencia, conjunto de clases de equivalencia, representante canónico, etc. Se define el conjunto de los números racionales como “El número racional se define como clase de equivalencia de pares ordenados”. “un par ordenado de números enteros, con la restricción que la segunda componente es diferente de cero”.
- El significado de cociente indicado es el núcleo de la conceptualización del número racional, sin embargo, el significado parte-todo es el más utilizado para introducir la noción de fracción y llega a predominar sobre el primero. Quedo

evidente que en esta etapa se ha asignado una utilidad marginal a los demás significados.

- La necesidad de desarrollar el conjunto de los números racionales como una entidad formalizada y como el conjunto de clases de equivalencia, obliga a los autores a enfatizar en la representación simbólica algebraica (literal) y numérica, en tanto que las gráficas se subordinan a éstas con propósitos explicativos y de ejemplificación. Además, se ha encontrado que las representaciones pictóricas están ligadas al significado parte-todo. Por la misma naturaleza de la matemática moderna, se utiliza representaciones de naturaleza conjuntista (diagramas de Venn) para ilustrar nociones de inclusión de conjuntos numéricos.
- Al igual que en el período anterior las transformaciones, esencialmente, se dan al interior de las representaciones simbólicas y son de simplificación, ampliación, manipulación de signos y producto cruz, para establecer equivalencia de fracciones, relaciones de orden y construcción de clases de equivalencia.
- Las conversiones más usuales se realizan en torno al registro simbólico numérico fraccional, en tanto que las representaciones pictórica continua y verbal, como lectura de fracciones son secundarias en importancia.
- Los libros de texto de este periodo presentan una configuración epistémica formalista. La noción de fracción se estudia de forma descontextualizada, disocia las nociones matemáticas de sus aplicaciones a la vida diaria descuidando el aprovechamiento de su componente fenomenológico

Conclusiones del Período C "Constructivista":

- El enfoque metodológico, muchas veces, inductivo muestra que los autores prefieren partir del significado parte-todo en las ejemplificaciones para introducir las nociones de fracción y número racional y, sólo luego, revisar el significado de cociente indicado para justificar la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros. En este período se abandona la tendencia a proponer definiciones formales del conjunto de los números racionales, sustentados en las clases de equivalencia, y adoptan definiciones menos elaboradas como par ordenado de números enteros. Sin embargo, en medio de la generalidad se ha encontrado dos libros de texto que enumeran los cinco diferentes significados del número racional, los cuales no son trabajados sistemáticamente durante la unidad temática.

- Quedó evidente que se enfatiza el significado parte-todo y se utiliza el significado de cociente indicado como un accesorio para justificar la ampliación de los números enteros, en tanto que, los demás significados son subsidiarios en la construcción del concepto de número racional.
- Los registros de representación más frecuentes son las simbólicas numéricas, algebraica y verbal. La representación paradigmática de número racional que se utiliza en este período es la forma comprensiva conjuntista, el cual transmite el significado de número racional como par ordenado restringido.
- La actividad cognitiva, transformaciones de los registros de representación que se encontraron son de igual naturaleza que en el período anterior. En tanto que las conversiones son muy escasas en comparación a la actividad de transformación. Se encontró una vez más, que el centro de las conversiones es el registro simbólico, en especial el simbólico numérico fraccional. La centralidad de los registros simbólicos confirma predominancia de esta representación en la comunicación matemática.
- El discurso matemático de los libros de texto, revela la idea que la matemática es un conjunto de conocimientos acabados y formalizados axiomáticamente. Esta creencia limita los procesos comunicativos matemáticos que se basan fundamentalmente en las representaciones simbólicas. Como consecuencia de este enfoque, la utilización de las representaciones gráficas es muy restringido. Así, se encontró que el uso de las representaciones pictóricas continuas son utilizadas esencialmente para explicar el significado parte-todo y de forma muy esporádica para el significado de cociente o razón. Se encontró que las representaciones pictóricas discretas son muy escasas y en ocasiones se usa para explicar el significado de razón del número racional. En la misma medida, los segmentos de recta, en su generalidad, explican el significado parte-todo.
- El estilo acabado y cerrado, muchas veces formal del desarrollo del concepto de número racional en los libros de texto, revelan el divorcio de su génesis histórica y escamotean el proceso histórico de su gestación, lo que explica la marginalidad

de los significados de medida y razón en el estudio de los números racionales en su representación fraccional.

- Las observaciones revelan que en el componente contextual, la fenomenología de las fracciones, así como sus aplicaciones a la vida cotidiana son elementos circunstanciales. Sólo después del desarrollo formal del número racional en el plano abstracto se apela a su fenomenología para presentarlos como aplicaciones a la vida cotidiana, que frecuentemente se encuentran al final de cada unidad temática. Los ejercicios de aplicación a la vida cotidiana que se proponen o desarrollan, se sustentan en el significado parte-todo o las denominadas “partes alícuotas”. En el período B se ha encontrado que el abordaje conceptual es descontextualizado, como corresponde a la orientación de la matemática moderna, mientras que en el último período esta tendencia es moderada, encontrándose situaciones de uso social de las fracciones.
- La secuencia de construcción del aprendizaje del conjunto de los números racionales se inicia con la ejemplificación, el enunciado del concepto y la proposición de ejercicios repetitivos, los que tienen el objetivo de desarrollar la capacidad de recordar conceptos a través de interrogantes abiertas y ejercicios de cálculo operativo. La estrategia metodológica es de naturaleza deductiva, luego de enunciar las definiciones se procede a la resolución y propuesta de ejercicios de aplicación del concepto.

2.4 Conclusiones Relativo a la Comprensión del Número Racional

En este apartado se expone las conclusiones más destacadas que se extraen del estudio empírico sobre la comprensión de los significados del número racional

a) Conclusiones más importantes de la comprensión del número racional:

- En las soluciones de los seis problemas de fracciones según los niveles de estudios profesionales, se encontró que la comprensión de los significados del número racional en su representación fraccional no progresa conforme se sube de nivel de estudio profesional. El empleo propio y correcto del significado en la resolución de las situaciones problemas es relativamente similar en los tres niveles de estudios profesionales.

- Los datos empíricos revelan que existe un ordenamiento jerárquico en el porcentaje del empleo propio y correcto del significado en la resolución de las situaciones matemáticas. Este orden parece mostrar una preeminencia del significado parte-todo sobre los demás. El orden que se configuró es el siguiente: parte-todo continuo, parte-todo discreto, operador, cociente, medida y razón. Se encontró que los estudiantes muestran mayores dificultades en la interpretación adecuada de los significados de medida y razón al momento de enfrentarse con situaciones problemáticas que involucran fracciones, ya que éstos en términos porcentuales apenas alcanza el 52% y 13% respectivamente.
- Los niveles de comprensión determinados según el número de situaciones problema resueltos adecuadamente, se distribuyen positivamente y de forma leptocúrtica, es decir, la mayor cantidad de estudiantes se ubican en los grados tercero, cuarto y quinto con altos porcentajes de 30%, 20% y 28% respectivamente, en tanto que, sólo un 7% se ubican en primer grado y un alumno (2%), en el sexto grado clasificatorio. Es alentador encontrar que en cifras acumuladas, el 78% de los estudiantes logran responder de forma correcta entre tres, cuatro y cinco problemas.
- Los estudiantes en su mayoría, tienen un dominio total del significado parte-todo continuo, lo utilizan con flexibilidad en sus respuestas, es decir, emplean adecuadamente el significado pertinente en la situación problemática.
- La interpretación del significado parte-todo discreto, muestra al igual que la anterior, un dominio de la mayoría de los estudiantes, sin embargo, se encontró que en la comprensión del enunciado de los problemas, existen sujetos que acuden a representaciones pictóricas continuas para representar objetos discretos.
- En la resolución de situaciones matemáticas asociados al significado cociente, medida, razón y operador de la fracción, tienen como principal causa de error las interferencias internas del significado parte-todo. En segunda instancia, el empleo incorrecto del significado pertinente a la situación es motivo de equivocación; y sólo en tercer lugar, se ubican las interferencias externas.
- La alta incidencia de error en la resolución del problema que comprende el significado de razón, es probable que se deba a la triple interpretación que asume: “El número de libros de investigación respecto al número de libros de

matemática”, a la inversa “el número de libros de matemática respecto al número de libros de investigación” y “el número de libros de investigación respecto al número total de libros”, este último esta claramente vinculado al significado parte-todo.

- El significado de número racional manejado por los estudiantes es esencialmente intuitivo, en su significado ‘parte-todo’. Esta comprensión se sostiene predominantemente en las representaciones simbólicas numérica fraccional y pictórica continua.

b) Conclusiones respecto a los registros de representación en la comprensión

- Se descubrió en los protocolos de solución de las seis cuestiones, que los estudiantes manipulan con mayor frecuencia y dominio las representaciones simbólica numérica fraccional y ‘pictórica continua’. En esta última se advierte que, a pesar de no ser pertinente su uso en todos los significados, su presencia es una constante, ya sea como elemento principal de la solución o como un auxiliar para entender la situación. La representación pictórica, si bien es pertinente a los significados ‘parte-todo continua’, persiste en la solución de las cuestiones que corresponde a otros significados. Los casos más resaltantes son las correspondientes a los significados de ‘cociente’, ‘operador’ y ‘razón’, a pesar que en la resolución de estos problemas no son necesarios los registros pictóricos, los estudiantes prefieren realizarlos, quizás con la esperanza de alcanzar una comprensión de la situación problemática; sin embargo, en muchos casos ésta resulta contraproducente para la solución.
- La representación verbal es empleada principalmente para comprender el enunciado del problema, pues se encontró situaciones que revelan la realización de paráfrasis del mismo en la identificación de los datos. En segunda instancia, se emplea para dar explicaciones interpretativas del proceso de solución y la exposición de resultados.
- Las transformaciones en los registros de representación observados son las vinculadas a las operaciones aritméticas, como la suma de fracciones unitarias, división, fracciones equivalentes.

- Las conversiones esencialmente son unidireccionales de pictórica continua a simbólica numérica. Este tipo de conversión es más usual, a pesar que se encontró conversiones de diferente naturaleza, como de fraccional a decimal, de simbólica numérica fraccional a simbólica porcentual; éstas no representan la generalidad del *modus operandi* de la muestra.

c) Conclusiones relativo a la interferencia en la comprensión de los significados del número racional:

- En las situaciones planteadas hubo un empleo mayoritario de la fracción sobre otros conocimientos. El establecimiento general del vínculo 'situación-fracción' y el uso preferencial dado a la fracción en situaciones no-exclusivas se interpretan precisamente como acciones favorables que respaldan una valoración preliminar positiva de la comprensión de los participantes, en lo referente a la extensión de sus conjuntos personales de situaciones.
- Las interferencias del significado parte-todo continuo y parte-todo discreto sobre los significados cociente, medida razón y operador, son los más usuales. Queda evidenciado que los significados parte-todo continuo y discreto interfieren en la interpretación de los significados cociente, medida, razón y operador, y de forma más aguda, en el significado razón. Los casos de interferencia suman 61. Es interesante apuntar también que los significados de medida y operador no actúan como interferentes, además que, los significados cociente y razón son incidentales. De todos los anteriores se encontró, en términos generales, que el significado de "razón" es el más interferido por el significado "parte-todo", en tanto que el menos afectado es el significado de operador. Se llegan a identificar tres casos típicos de interferencia interna producidos entre los significados: (a) P*arte-todo* sobre el resto de significados; (b) C*ociente* sobre *operador y* (c) *Razón* sobre *parte-todo, medida* y *operador*.
- Las *interferencias internas* como las identificadas, constituyen indicadores de primer orden de las particularidades de los posibles vínculos que los participantes establecen en el ámbito interno entre los significados de la fracción. De hecho, estas interferencias facilitan la caracterización de la estructura fenómeno-epistemológica de los distintos conjuntos personales de situaciones vinculados a

los significados de la fracción. Precisamente, la amplitud y complejidad de la red de interferencias internas entre significados, manifestada en cada caso, emergen como criterios fundamentales para valorar la comprensión de los estudiantes y establecer diferencias entre ellos.

- La *Interferencia Externa* pone de manifiesto que algunos profesores en formación no llegan a establecer el mencionado vínculo ‘situación-fracción’ y, por tanto, a reconocer la situación como perteneciente al conjunto genérico de situaciones asociados a la fracción. Se puede considerar, entonces, que los conjuntos personales de situaciones se muestran reducidos en esta parcela fenomenológica respecto a los de aquellos estudiantes que sí superaron la *Interferencia Externa* en la prueba, lo que se interpreta a su vez como una limitación en la comprensión de la fracción. Las nociones matemáticas interferentes son el porcentaje, sustracción de fracciones, cocientes decimales, algebrización de la situación problemática y la aplicación de la regla de tres simple.

3. SUGERENCIAS

En esta parte se presenta las repercusiones que entrañan los resultados de la investigación para los estudiantes de educación matemática en cuanto objetos de evaluación y futuros docentes que conducirán el aprendizaje de escolares, además las derivaciones para los docentes de la especialidad de matemática de la Facultad de Educación de la UNA Puno.

3.1 Sugerencias para los Estudiantes en cuanto a Docentes en Formación

Los estudiantes de educación matemática, como futuros profesores que conducirán los procesos de aprendizaje de educandos del nivel secundario, deberán tener en cuenta las siguientes repercusiones de su estado de formación para estar en condiciones óptimas de ejercer la docencia:

- Considerar la teoría sobre la comprensión del conocimiento matemático para conducir el proceso de aprendizaje de los educandos de educación secundaria.

- Considerar la teoría sobre el lenguaje matemático, sus representaciones para planificar implementar, ejecutar y evaluar una sesión de aprendizaje, así mismo diseñar y producir material educativo.
- Considerar las interferencias entre los diferentes significados del número racional, cuando conduzca el aprendizaje de este objeto matemático.

3.2 Sugerencias para los Docentes de la Especialidad de Matemática de la Facultad de Educación de la UNA Puno.

Los docentes como responsables de la formación de profesores de matemática, a la luz de los resultados de la presente investigación, será necesario que consideren lo siguiente:

- Para la práctica docente, el estudio reportado proporciona un método operativo para la organización de situaciones matemáticas, así como, una referencia objetiva con la cual afrontar la interpretación en términos de comprensión de las acciones de los estudiantes. A través de la experiencia sobre los significados de la fracción, se dan muestras del uso que podría darse a estas situaciones en el aula de cara a la valoración y al desarrollo de la comprensión del conocimiento matemático en los alumnos, haciéndose evidente, por tanto, el apoyo que a través del modelo puede ofrecerse al profesorado, en la toma de decisiones sobre contenidos o formas de enseñanza.
- Si los sistemas de representación son un recurso comunicativo y el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas son funciones comunicativas, entonces, en el desarrollo de las diferentes asignaturas de formación matemática se debe promover el uso de sistemas de representación, manipulando sus actividades cognitivas como la formación de representaciones, transformación y conversión, para promover aprendizajes comprensivos.
- Si los sistemas de representación externos son un vehículo para estudiar el pensamiento del sujeto que aprende, entonces, será preciso que los docentes investigadores desarrollen instrumentos de exploración del pensamiento de procesos cognitivos cada vez más confiables y válidos en el campo del pensamiento numérico algebraico.

4. PERSPECTIVAS FUTURAS DE INVESTIGACIONES

En la realización de la investigación se ha encontrado limitaciones, dificultades y conjeturas pendientes de indagar, lo que deja abierta otras vías para proseguir la investigación, seguir realizando esfuerzos en educación matemática, encaminados al desarrollo de aproximaciones interpretativas de la comprensión del conocimiento matemático, así como propuestas curriculares sistemáticas que contemplen, con un mayor acierto, la complejidad global de la comprensión de los conocimientos matemáticos y su inclusión efectiva en los diseños y desarrollos curriculares ordinarios. En este sentido, pensamos que los principios establecidos aquí, para la interpretación de la comprensión en escenarios de valoración, se sitúan en un contexto de interés para los estudios recientes sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Existen aspectos pendientes que abren nuevas sendas para futuras investigaciones que se esbozan a continuación:

Primero: Una de las principales dificultades que limitan en la actualidad el estudio de la comprensión del conocimiento matemático viene dada por el problema genérico de la *interpretación de la acción intencional* del otro. Toda aproximación a la comprensión del conocimiento matemático, se ve afectada en su conjunto por la naturaleza interpretativa de su valoración, lo que supone interpretar productos observables originados por una actividad cognitiva interna, lo que sitúa la cuestión de la interpretación en la base de la investigación sobre comprensión en matemáticas. Por esta razón, sugerimos realizar esfuerzos destinados a profundizar, en lo posible, en las particularidades de la interpretación y en los principales escenarios de valoración presentes en el aula de matemáticas como estrategias para la obtención de información sobre los distintos aspectos relacionados con el fenómeno de la comprensión.

Segundo: Esta investigación tiene como sujetos de observación a estudiantes de formación magisterial, se estudia su comprensión a través de sus representaciones externas en la solución de problemas sobre significados del número racional; en consecuencia, su correlato será investigar el fenómeno de interferencia entre significados del número racional que revela el profesor de matemática cuando enseña los números racionales y su relación con el aprendizaje que promueve en sus estudiantes de primer grado de educación secundaria.

Tercero: Si bien es cierto, que en este estudio se toma como punto de análisis los números racionales para el estudio de la comprensión en relación con los sistemas de representación externa, queda pendiente responder otras cuestiones de la comprensión de los distintos componentes del área curricular de matemática del nivel de educación secundaria.

Cuarto: Una dificultad latente del estudio que se reporta, es la escasa información teórica actualizada que se maneja para la fundamentación de la investigación, por esto se sugiere realizar investigaciones del tipo básico que tengan como objetivo construir un sólido marco teórico sobre la teoría de la comprensión que integre diferentes escuelas y corrientes de investigación y a la vez se delimite las fronteras entre ellas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Amorin, J; Flores, C. y Moretti, M. (2005). Representaçaoes do número racional na formação de professores que ensinam matemática. En *Revista Electronica de Republicaçao em Educação Matemática.* UFSC, pp. 41-48
2. Arcavi, A. (1995). ...y en matemática, los que instruimos ¿qué construimos? *Substratum. Vol. II,* N° 6. pp. 77-94.
3. Bachelard, G. (1972). *La formación del Espíritu Científico.* Buenos Aires: Argos.
4. Barcia, R. (1954). *Sinónimos castellanos*. Buenos Aires: Sopena.
5. Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. *Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning.* NJ: MacMillan Library Reference USA.
6. Bender, P. (1996). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concepts. En C. Alsina, J. M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez (Eds.). *8º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME). Selección de Conferencias* (pp. 57-74). Sevilla, Spain: SAEM Thales.
7. Birkhoff, G. y MacLane S. (1960). *Álgebra moderna*. Barcelona: TEIDE.
8. Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidos.
9. Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa. Guía práctica*. Barcelona: CEAC.
10. Bosch, M. (2000). *Un punto de vista antropológico: la evolución de los "Instrumentos de representación" en la actividad matemática.* IV Simposio SEIEM, Huelva: Universidad de Huelva.
11. Boyer, C. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid. Edit. Alianza.
12. Brousseau G. (1989) Les obstacles épistémologiques et la didactiques des mathématiques. In: N. Bednarz and C. Garnier (eds): *Construction des savoirs – Obstacles et conflits* (41-63)- Montréal: *Centre interdisciplinaire de recherché sur l'apprentissage et le développement en Education* (CIRADE)

13. Brousseau, G. (2004). *Théorie des situations didactiques.* Textes rassembléset prepares par N. Balacheff. M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield. Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.
14. Brown, T. (2001). *Mathematics Education and Language. Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
15. Bruner, J. (1984). Desarrollo cognitivo y educación. (J. M. Igor, R. Arenales, G. Solana, F. Colina, Trad.). Madrid: Morata. (Trabajo original publicado en 1966).
16. Burton, J. (1969). *Teoría de los números*. México: Trillas.
17. Byers, V. y Erlwanger, S. (1985). Memory in Mathematical Understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 259-281.
18. Carpenter, T. y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.) *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
19. Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (coord..). *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* (pp. 95-124). Barcelona: ICE/Horsori.
20. Castro, E. y Rico, L. (1994). Visualización de secuencias numéricas. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas,* (1) 75-84.
21. Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (Editor Castro, E.) Madrid: Síntesis.
22. Castro, E., Rico L. y Romero, I. (1997). Sistema de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las ciencias,* Vol 15 n° 3 pp. 361-371
23. Castro, E., Rico, Luis. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Bogota. Iberoamericana.
24. Castro, E., Rico, Luis., Castro, E. (1988). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.

25. Castro, Enrique. (Eds.) (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.
26. Cavey, L. O. y Berenson, S. B. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 171-190.
27. Chevallard, Y (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: AIQUE.
28. Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.
29. Cockcroft, W. H. Y otros (1985). *"Las matemáticas si cuentan"*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Edición en castellano.
30. Coffey, A. y Atkinson, P. (2003). *Encontrar el sentido a los datos cualitativos*. Antioquia: Sage.
31. Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
32. Contreras, A. y Font, V. (2002). *¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?*. XVIII Jornadas del SI-IDM., Castellón, 19-21 abril (paper).
33. Davis, R. B. (1992). Understanding "Understanding". *Journal of Mathematical Behavior*, 11, 225-241.
34. De León, H. (1998). Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. *Relime*, Vol. 1 (2), 5-28.
35. De León, H. y Fuenlabrada, I. (1996). Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 1 (2), 268-282.
36. Diccionario de Pedagogía y Psicología (1999). Ediciones Cultural, S.A. Madrid España.
37. Diccionario Enciclopédico Ilustrado (2000). Océano UNO. Grupo Editorial Océano Barcelona España.
38. Diccionario Enciclopédico Ilustrado Sopena (1977). (5) Tomos. Barcelona: Sopena.
39. Dienes, P. (1971). *La potencia de la matemática*. Buenos Aires: Estrada.

40. Dieudonné, J. (1986). Prologo del libro álgebra lineal y geometría elemental. En J. Piaget, G. Choquet, J. Dieudonné, R. Thom y otros (Ed.), *La enseñanza de las matemáticas modernas,* (pp. 270-284). Madrid: Alianza.
41. Dos Santos, A. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados: Um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no encino fundamental*. Tesis de Maestría en Educación Matemática. PUC. São Paulo.
42. Duffin, J. y Simpson, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4 (*pp.166-173). Lhati, Finland: PME.
43. Duffin, J. y Simpson, A. (2000). A search for understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 4, 415-427.
44. Duval, R. (1991). Interaction des miveaux de représentation dans la comprensión des textes. *Annales de Didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg,* n. 4, 163-196.
45. Duval, R. (1988). Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. In *Anales de Didáctica y de Ciencias Cognitivas, IREM de Strasbourg,* n. 1, 235-253.
46. Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivos del pensamiento. *Anales de Didáctica y de Ciencias Cognitivas, IREM de Strasbourg,* n. 5, 37-65.
47. Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive funtions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt, & M Santos (Edors.) *Psychology of Mathematics Education PME-NA XXI Vol,* 1 (pp. 3-26). Cuernava.
48. Duval, R. (2004. *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. (Trabajo original publicado en 1995).
49. Encinas , J. A. (1932). *Un ensayo de escuela nueva en el Perú*. Lima: CIDE.
50. English, L. (Ed.) (2002). *Handbook of International Research in Mathematics Education.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

51. English, L.D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

52. Escolano, R. (2001). *Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: Un estudio desde el modelo cociente.* Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Almeria.

53. Escolano, R. (2004). Presencia histórica de la fracción en los libros de texto del sistema educativo español. *VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La Coruña.

54. Escolano, R. y Gairín, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. *Unión, Revista Latinoamericana de Educación Matemática,* (1), 17-35.

55. Even, R. & Tirosh, D. (2002). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical learning. In L. English (Edt.). *Handbook of International Research in Mathematics Education.* (pp. 197-218). Mahwah, N. Y.: Lawrence Erlbaum Associates.

56. Factori, R. (2006). *Crença, concepção e competência dos profesores do 1º e 2º ciclos do encino fundamental com relação.* Tesis de Maestría en Educación Matemática. PUC. São Paulo.

57. Fennema, E. y Romberg, T. A. (Eds.) (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

58. Ferrater, J. (1988). *Diccionario de filosofía abreviado*. Editorial Sudamericana

59. Ferreira M. J. (1997). *Sobre a introducão do conceito de número fracionário.* Tesis Maestría. Pontificia Universidad Católica de São Paulo. Brasil.

60. Ferreira M. J. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.* Tesis Doctoral. Pontificia Universidad Católica de São Paulo. Brasil.

61. Font, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal* (14), 1-35.

62. Font, V. y Godino, J. D. (2007). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matemática Pesquisa.*
63. Font, V., Godino, J. y D'Amore B. (n.d.). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática.* Recuperado desde http://www.ugr.es/local/jgodino/
64. Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (L. Puig, Trad.). México: CINVESTAV: Departamento de Matemática Educativa. (Trabajo original publicado en 1983).
65. Gairín, J. (1999). *Sistemas de representación de números racionales positivos, Un estudio con maestros en formación*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza. España.
66. Gairín, J. (2001). Sistemas de Representación de Números Racionales Positivos, Un estudio con maestros en formación. *En Contexto Educativo,* N° 4 pp. 137-159. Resumen de la memoria de Tesis Doctoral.
67. Gairín, J. y Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos.* Madrid: Síntesis.
68. Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Málaga.
69. Gallardo, J. (2006). Aportes a la investigación en Educación Matemática en contextos latinoamericanos desfavorables: el acceso a la información a texto completo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*.
70. Gallardo, J. y Gonzalez, J. L.(2005). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM).* Córdoba.
71. Gallardo, J. y González, J. L. (2006). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics,* 26, 2, 10-15.
72. Gallardo, J. y González, J. L. (2006). El Análisis Didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. En (Eds.) *Actas del X Simposio de*

la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Huesca: Universidad de Zaragoza.

73. Garcia, P. (1992). *Diccionario de términos matemáticos.* Valladolid: La Calesa.
74. Garrido, G. (2000). *Registros de representação e o número racional. Un abordagem nos libros didácticos.* PUC. São Paulo.
75. Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77-87.
76. Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22, 2/3, 237-284.
77. Godino, J. D. (2002b). Prospettiva semiotica della competenza e della comprensione matemática. *La matematica e la sua didattica*, 4, 434-450.
78. Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 14(3), 325-355.
79. Godino, J. D., Font, V., Contreras, Á. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 117-150.
80. Goldin, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. En L. D. English (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematicss Education* (pp. 197-218). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
81. Gonzáles, J. y Arrieche, M. (2005). Significados institucionales y personales de las fracciones en educación Básica. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México. CLAME,* V. (18) 357 – 362.
82. González, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-256). Osnabrück, Germany: ERME.
83. González, J. L. (1999). Aproximación a un marco teórico y metodológico específico para la investigación en Educación Matemática. En T. Ortega (Ed.)

Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM (pp. 14-30). Valladolid: Universidad de Valladolid.

84. Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* Rotterdam: Sense Publishers.
85. Gutiérrez, A. y Maz, A. (2001). Cimentando un proyecto de investigación: la revisión de literatura. En P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 149-164). Granada: Editorial Universidad de Granada.
86. Gutiérrez, V. M. (1993). *Matemática Primer Grado*. Lima: Omega S.A.
87. Guzmán M. (1997) *El rincón de la pizarra. "Ensayos de visualización en análisis matemático"*. Madrid: Pirámide.
88. Hernández S., R., Fernández C.,C. y Baptista L.,P. (2003). *Metodología de la Investigación.* México: Mc. Graw Hill.
89. Herstein, I. N.; (1974). *Álgebra moderna*. México: Trillas.
90. Hiebert, J. (1988). A theory of Developing Conpetence with Griten Mathematics' Symbols. *Educational Studies in Mathematics,* 19, pp. 333-355.
91. Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.
92. Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
93. Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K.C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. y Human, P. (1997). *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding,* Portsmouth, N. H.: Heinemann.
94. Kaput, J. (1999). On the development of human representational competence from an evolutionary point of view: From episodic to virtual culture. In F. Hitt, & M Santos (Eds.) *Psychology of Mathematics Education (PME-NA XXI)* Vol 1 (pp. 27-48), Cuernava.

95. Kaput, J. y Moreno L. (2004). Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y del álgebra. En J. Lemoine (Dir.). *Matemática educativa: fundamentos de la matemática universitaria* II (pp. 3-23). Bogotá: Escuela Colombiana de Ingeniería.

96. Kieren, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra a broademing of sources of meaning. In A. Gutierrez & P. Boero (eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam Taipei: Sense Publishers.

97. Kieren, T. (1999). Languageuse in embodied action and interaction in knowing fractions. In F. Hitt, & M Santos (Eds.) *Psychology of Mathematics Education (PME)* Vol 1, Cuernava.

98. Kieren, T., Pirie, S. y Calvert, L. G. (1999). Growing Minds, growing mathematical understanding: mathematical understanding, abstraction and interaction. En L. Burton (Ed.) *Learning Mathematics: from Hierarchies to Networks* (pp. 209-231). London, GBR: Routledge.

99. Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 63-73.

100. Koyama, M. (2000). A research on the validity and effectiveness of “two-axes process model” of understanding mathematics at elementary school level. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 159-166). Hiroshima, Japan: PME.

101. Llinares, S. y Sánchez V. (1988). *Fracciones, La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.

102. Llinares, S. y Sánchez, V. (1997). Aprender a enseñar. Modos de representación y números racionales. *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* Zamora.

103. Lohmann, C. Dirección. (2000). *Símbolo. Matemática 1*. Obra colectiva Lima: Santillana.

104. Magina, S., & Campos, T. (2004). *A fracão na perspectiva do profesor e do aluno das series iniciais da escolarizacao brasileira*.

105. Maza, C. y Arce, C. (1991). *Ordenar y clasificar*. Madrid: Síntesis.

106. Meile, R. (1986). *La estructura de la inteligencia*. Barcelona: Herder.

107. Ministerio de Educación, Unidad de Medición de la Calidad Educativa. (2001). *El Perú en el primer estudio internacional comparativo de la UNESCO sobre lenguaje, matemática y factores asociados en tercer y cuarto grado.* Boletín UMC Nº 9

108. Ministerio de Educación, Unidad de Medición de la Calidad Educativa. (2004). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: Tercer grado de Secundaria y Quinto grado de Secundaria.*

109. Ministerio de Educación, Unidad de Medición de la Calidad Educativa, (2001). *Como rinden los estudiantes peruanos en Comunicación y Matemática, Resultados de la Evaluación Nacional 2001, Sexto grado de primaria Informe Pedagógico.*

110. Monteiro, C., Pinto, H. y Figueiredo, N. (2005). As fraccoes e o desenvolvimiento do sentido do número racional. *Educacão e Matemática*, (84), 47-51.

111. Nakahara, T. (1993). Study of the representational system in mathematics education. *Hiroshima Journal of Mathematics Education* 2: 59-67. 1994. Horoshima University, JAPAN

112. Nakahara, T. (1994). Study of the representational system in mathematics education. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 2: 59-67.

113. National Council Of Teachers Of Matematics. (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla: SAEM Thales-NCTM.

114. National Council Of Teachers Of Matematics. (2004). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales-NCTM.

115. Neuman, D. (1996). ¿Existen problemas específicos en los primeros cursos de la escuela? *Uno*, (9), 49-62.

116. Niemi, D. (1996a). Assessing conceptual understanding in mathematics: Representations, problem solutions, justifications, and explanations. *The Journal of Educational Research,* 89 (6), 351-363.

117. Niemi, D. (1996b). *Instructional Influences on Content Area Explanations and Representational Knowledge: Evidence for the Construct Validity of Measures*

of Principled Understanding. Los Ángeles, CA: CRESST/University of California, Los Angeles.

118. Novak, J. y Gowin, D. (1984). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.
119. Núñez, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Bell, D., Evans, D. & Wade, J. (2004). Children's understanding of fractions. *Ardeco Symposium,* Paris (paper).
120. Oubina, L. (1974). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Buenos Aires: Eudeba.
121. Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics,* 26, 165-190.
122. Polya G. (1944). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1985.
123. Post, T., & Cramer, K. (1987). Children' strategies when ordering rational numbers. *Aritmetics Teacher,* 35(2), 33-35.
124. Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (coord..). *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* (pp. 61-94). Barcelona: ICE/Horsori.
125. Radford, L. (1999). Las representaciones volviendo a pensar. *Los procedimientos de la 21 Conferencia Internacional para la Psicología de Educación Matemática,* el Capítulo norteamericano, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México.
126. Radford, L. (2004). Semiótica cultural y cognición. *Conferencia plenaria dad en la Decima reunión latinoamericana de matemática Educativa*. Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, México.
127. Ramos, A. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matemática. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matemática e la sua didattica,* Anno 20, n. 4, 535-556.
128. Rico L. Coordinador y otros. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Cuadernos de formación del Profesorado N° 12. Madrid: Horsori.
129. Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *IV Simposio SEIEM,* Huelva: Universidad de Huelva.

130. Rodrigues, W. R. (2005). *Números racionais: Um estudo das concepções de alunos após o estudo formal.* Tesis de Maestría en Educación Matemática. PUC. São Paulo. Brasil.

131. Rojas, G. (1995). *Matemática 1 Teoría y Práctica*. Lima: AMBERS.

132. Rojo, A. (1995). *Álgebra I.* Buenos Aires: El Ateneo.

133. Romero I., Rico L. (1994). La introducción del número real en secundaria: algunas pruebas en la irracionalidad de $\sqrt{2}$. *Epsilon* nº 29, pp. 73-87 . Madrid España.

134. Romero, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 35-46). Huelva: Universidad de Huelva.

135. Romero, I.; Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en Secundaria. *Revista EMA*, Vol. 4, Nº 2, pp.117-151.

136. Romero, R. (1976). *Matemática Moderna*. Lima: Universal.

137. Rosental M. M., Iudin P.F. (1 995). *Diccionario filosófico*. Lima: Universo.

138. Ruiz, F., Castro, E. y Godino, J. D. (2001). Recursos en Internet para la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 201-212). Huelva: Universidad de Huelva.

139. Sánchez, V. (2000). Representación y comprensión en el profesor de matemáticas. *IV Simposio SEIEM,* Huelva: Universidad de Huelva.

140. Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

141. Sierpinska, A. (2000). Mathematics classrooms that promote understanding. In Fennema, E. & Romberg, T. A. (Eds.), *The studies in mathematical thinking and learning series.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

142. Sierra, R. (1994). *Técnicas de investigación social. Teoría y ejercicios.* Madrid: Paraninfo.

143. Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Morata.
144. Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
145. Sotos, M. (2004). ¿En qué piensa el alumno cuando decimos número?. *Uno,* (37), pp. 94-104
146. Stone, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* Buenos Aires: Paidós.
147. Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Relime,* Vol 7 (3), 235-256.
148. Valpereiro, L. (2005). *Fração e seus diferentes significados um estudo com alunos das 4ta e 8va séries deo Encino Fundamental*. Tesis de maestría en Educación Matemática. PUC. São Paulo.
149. Valverde, M., Orendain, M., Campa, A. y Hernández, E. (1996). La interpretación ordinal de la fracción. En Hitt F. (Edtor.) *Investigaciones en Matemática Educativa.* (pp.173-196). México: G.E. Iberoamérica.
150. Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didáctiques des Mathématiques.* 10(2,3). 133-170.
151. Vygotski, L. (1962). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica, Grijalbo.
152. Warner, L. B., Alcock, L. J., Coppolo, J. y Davis, G. E. (2003). How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding? En N. A. Paterman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 371-378). Honolulu, USA: PME.
153. Whitehead, A. N. (1944). *Introducción a las matemáticas.* Buenos Aires: EMECE.

ANEXOS

Anexo I. Formulación del Problema e Instrumento de Recolección de Datos.

A.1 PROBLEMA OBJETIVO HIPÓTESIS

Etapas	Problema	Objetivo	Hipótesis
	Problema general: ¿Cuál es la naturaleza de la comprensión de los significados del número racional que revelan los estudiantes de educación matemática?	**Objetivo General:** Evaluar la comprensión de los significados del número racional de los estudiantes de educación matemática.	**Hipótesis general** La enseñanza formal de los números racionales no fue eficaz para lograr un comprensión de los significados del número racional en los futuros profesores de matemática.
Análisis Didáctico	**Problemática específica** 1. ¿Cuál es el estado actual del conocimiento sobre la comprensión y registros de representación de los significados del número racional?	**Objetivos Específicos:** 1. Desarrollar un Análisis didáctico que integré diferentes teorías para afrontar el estudio de la comprensión de los significados del número racional.	**Hipótesis subsidiarias:** 1. El análisis didáctico proporcionan un sólida fundamentación teórica y criterios objetivos para el estudio de la comprensión de los significados del número racional.
Estudio Empírico Centrados en la evaluación de los significados del número racional que manejan los estudiantes de formación magisterial, el estudio se ocupa de las siguientes interrogantes específicas:	**2. ¿Cómo se presentan los significados del número racional en los libros de texto de matemática?** 2.1 ¿Qué significados del número racional se estudia en los libros de texto? 2.2 ¿Qué representaciones utilizan los autores para presentar los significados del número racional. 2.3 ¿Cómo es el tratamiento de los registros de representaciones, en el desarrollo de los significados del número racional en los libros de texto? 2.4 ¿Qué situaciones fenomenológicas, históricos y metodológicos utilizan los autores para introducir los números racionales?	**2 Evaluar los significados del número racional que se desarrollan en los libros de texto.** 2.1 Identificar los significados que se desarrollan en los libros de texto. 2.2 Identificar los tipos de representaciones en el desarrollo de los significados del número racional. 2.3 Caracterizar las transformaciones y conversiones de los registros de representaciones que se realizan en la presentación de los significados del número racional. 2.4 Valorar las situaciones fenomenológicas, históricas y metodológicas en el desarrollo de los número racionales.	**2 En los libros de texto de matemática el significado de "parte todo" es el más utilizado en la introducción del concepto de número racional entendido como cociente de un par ordenado de enteros.** 2.1 En los libros de texto el estudio de los significados del número racional se limitan esencialmente a las interpretaciones de parte todo y cociente 2.2 El tipo de representación que más se enfatizan es el simbólico numérico. 2.3 Las transformaciones más predominantes se producen en la representación simbólica numérica y la conversión de simbólica a gráfica. 2.4 Las situaciones fenomenológicas e historias son muy escasas y no poco permitente en la exposición de los significados del número racional
	3. ¿Cómo es la comprensión de los significados del número racional de los estudiantes de formación docente? 3.1 ¿Qué tipo de interferencias se revelan en la interpretación de los significados del número racional cuando se enfrentan a situaciones problemáticas con fracciones? 3.2 ¿Cuál es la naturaleza de la comprensión de los significados que revelan las representaciones exteriorizadas por los estudiantes cuando responden a una prueba de preguntas abiertas? **3.3** ¿Qué tipos de registros de representación utiliza el alumno en la resolución de problemas referente a los significados del número racional?	3 **Describir la naturaleza de la comprensión de los significados del número racional que los estudiantes de formación docente ostentan**. 3.1 Evaluar los tipos de interferencias entre significados del número racional que se detectan en las soluciones a los problemas con fracciones de los estudiantes 3.2 Describir la naturaleza de la comprensión de los significados que se desprenden de la resolución de problemas con fracciones. **3.3** Identificar los tipos de registros de representación que utiliza el estudiante cuando resuelve los problemas con fracciones.	**3. La comprensión se fundamenta esencialmente en el significado parte todo del número racional en tanto que la fracción como medida y razón son los menos comprendidos.** 3.1 La interferencia del significado parte todo en los demás significados (medida, razón, cociente y operador) es preponderante. 3.2 La comprensión de los significados del número racional es de naturaleza intuitiva y parcial fundado básicamente en el significado parte todo **3.3** Los registros de representación simbólica numérica y pictórica del todo continuo son las que prevalecen en la resolución de problemas.

A.2 Presentación de la Prueba sobre Comprensión de los Significados del Número Racional.

PRUEBA SOBRE COMPRENSIÓN DE LOS SIGNIFICADOS DEL NÚMERO RACIONAL

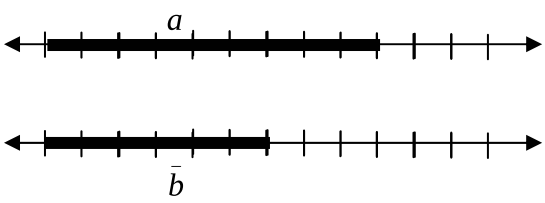
Apellidos y Nombres : ....

Nivel: .... Edad:...............Sexo: M □ F □ Fecha: ....

<u>INSTRUCCIONES PARA RESPONDER AL CUESTIONARIO</u>

1. Lea atentamente los enunciados y preguntas.
2. Recuerde que para expresar sus respuestas puedes utilizar palabras cotidianas, números, símbolos, figuras, etc.
3. Si no puede responder a la cuestión escriba explicando por qué no puede hacerlo. (No tiene los términos adecuados, no recuerda, lo ignora u otra razón)
4. Si se ha equivocado puede **tachar** y continúa con la respuesta. **<u>(Nunca borrar)</u>**
5. Si tiene que hacer cálculos hágalo en la parte en blanco de la misma hoja. **<u>De ninguna manera haga sus cálculos en otra hoja.</u>**
6. Le rogamos responder las cuestiones en completo silencio para no interrumpir a sus compañeros.
   Le agradecemos su gentil cooperación e interés por responder a las cuestiones

Sector "Preguntas"	Sector "Respuestas"
1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	
2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	
4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	
5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	
6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática?	

Señor Estudiante, gracias por su cooperación.

Anexo II. Información Adicional Sobre el Análisis de Libros de Texto.
A.II.1 Diseños y Programas Curriculares del Contenido "Números Racionales" Perú 1982-2005

Grado	Dispositivo Leal	Contenidos Específicos	Capacidades, objetivos/ Pautas Metodológicas
1 Primero	R.M. Nº 0667-2005 Diseño Curricular nacional de la Educación Básica Regular. Proceso de Articulación.	Números racionales Igualdad. Adición. Opuesto de un número racional. Valor absoluto. La propiedad de densidad. Multiplicación. Propiedades. Inverso de un número racional no nulo. La propiedad distributiva. Sustracción y división. Propiedades. Potencia con exponente entero. Expresión decimal de un número racional. Expresión decimal periódica y números racionales. Generatriz de una expresión decimal periódica.	El Área de matemática desarrolla las siguientes capacidades de área: Razonamiento y Demostración. Comunicación matemática. Resolución de problema.
2 Primero	R. M. Nº 019-2004. Programa Estratégico Nacional de Desarrollo Curricular. Diseño Curricular Básico	Números racionales Igualdad Adición. Opuesto de un número racional. Valor absoluto. La propiedad de densidad. Multiplicación. Propiedades. Inverso de un número racional. La propiedad distributiva. Sustracción y división. Propiedades. Potencia con exponente entero. Expresión decimal de un número racional. Expresión decimal periódica y números racionales. Generatriz de una expresión decimal periódica.	**El Área de matemática, prioriza el desarrollo de tres capacidades**: Razonamiento y demostración. Interpretación de gráficos y/o expresiones simbólicas, y Resolución de problemas.
3 Primero	Reconocido por el MED-2002 Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores. Una Nueva Secundaria	Fracciones y decimales.	**Competencia General:** Establece conexiones entre los conceptos, hace uso de destrezas, algoritmos, estrategias heurísticas, procesos de modelación, y muestra capacidad innovadora, interés, confianza, perseverancia y flexibilidad al resolver situaciones problemáticas. Utiliza el lenguaje matemático para interpretar, argumentar y comunicar información de forma pertinente; lo valora y demuestra orden y precisión. Procesos característicos (Capacidades) Resolución de problemas Razonamiento y demostración Interpretación y comunicación. Manejo de algoritmos.
4 Primero y Segundo	Reconocido por el MED-2001 Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores (Adolescentes) Propuesta curricular experimental.	**Primer grado**: Fracciones y decimales: Operaciones y propiedades. **Segundo grado**: Números racionales: Operaciones y propiedades**.**	**Competencia**: Interpreta, formula y resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando técnicas y fórmulas al aplicar métodos apropiados que involucran datos y contraejemplos, utilizando números, funciones, geometría, medida y estadística, desarrollando comunicación, razonamiento y conexiones matemáticas y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia. **Se evalúa los siguientes criterios**: Formulación y resolución de problemas. Razonamiento y demostración. Interpretación y comunicación. Aplicación de algoritmos.
5 Primero	Resolución Ministerial Nº 0178-1993-ED. Programa Curricular del Primer Grado de Educación Secundaria de Menores.	Extensión de los números enteros a los racionales. Fracción, Conjunto Q de los números racionales y recta numérica. Comparación en Q. Operaciones de adición y sustracción de fracciones. Número mixto. Operaciones de multiplicación y división de fracciones. Representación decimal de un número racional. Números decimales exactos y periódicos. Comparación. Operaciones con expresiones decimales. Generatriz de un número decimal, Cálculo. Potenciación con base fraccionaria o decimal y exponente entero. Radicación en Q. Raíz cuadrada.	**Objetivos:** Identificar números racionales y resolver problemas reales aplicando las propiedades y técnicas operativas propias del conjunto de los números racionales.

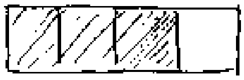
6 Primero	Aprobado por el MED-1989. Programa de Matemática para el Primer Grado de Secundaria	Ampliación de Z. El conjunto Q de los números racionales. La recta numérica y los números racionales.. Representación de los números racionales mediante fracciones: Comparación: Equivalencia, relación mayor, menor. Operaciones: Adición, sustracción, multiplicación, división. Potencia con exponentes enteros. Propiedades.. Representación decimal de los números racionales. Decimales: Exactos-periódicos. Generatriz. Aproximación. Comparación de decimales. Operaciones con expresiones decimales: Adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Radicación en Q. Concepto. Raíz cuadra.	
7 Segundo	R.M. 0043-82-ED. Programa Curricular de Matemática	Ejemplos de Actividades de Aprendizaje: Identifican el número racional como el cociente de un entero entre un entero positivo. Identifican el conjunto de racionales positivos Q^+, racionales negativos Q^- y el racional Q. Utilizan la recta numérica. Reconocen la escritura decimal de números racionales. Hallan la generatriz de números decimales finitos o periódicos. Reconocen que existen decimales que no es posible expresarlo como fracciones: Números irracionales. Adquieren la noción de número real. Comparan los números racionales en sus expresiones fraccionaria y decimal: "igual a", "menor que" y "mayor que". Adición y sustracción. Multiplicación y división. Potenciación de racionales con base fraccionaria y decimal y exponente entero. **Recomendaciones metodológicas**: Se recomienda que los alumnos comprendan el significado del ordenamiento de números racionales sea a través de la observación de gráficos.	Realizar operaciones de adición, multiplicación, división, potenciación y radicación en el conjunto Q de números racionales. Realiza operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación en el conjunto Q de números racionales. **Observaciones:** En este periodo en primer grado se desarrolla los contenidos; regla de tres simple y media aritmética simple. El objetivo es Aplicar los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas sobre regla de tres y media aritmética simple. Para el estudio de estos contenidos es necesario tener conocimientos sobre los números fraccionarios, sin embargo estos recién son estudiados en segundo grado. Las recomendaciones metodológicas priorizan el aspecto procedimental: "*El procedimiento es sencillo: Basta para cada caso, plantear la ecuación correspondiente y ...resolver*", es decir sugiere hacer una aplicación algorítmica de las ecuaciones.

A.III. Protocolos de Solución a las Situación Problema de la Prueba sobre Comprensión de los Significados del Número Racional.

A.3.1 Protocolos de Solución a la Situación Problema con Significado Parte-Todo Discreto.

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 1
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO PARTE TODO CONTINUO
TERCER NIVEL

3-1 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 barra de chocolate 1 entero la barra de chocolate entonces $\frac{3}{4.} \Rightarrow$ tomar los 3/4 de la barra de chocolate

3-2 **[IE ; (V, SNp)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Que, me comí el 75% del chocolate. y me queda solo el 25% para comerlo.

3-3 **[EPC ; (SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	representa la fracción $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

3-4 **[EPI ; (V)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	de una unidad tomo el un tercio de una unidad.

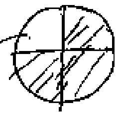
3-5 **[EPC ; (SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Sería $\frac{3}{4}$ =

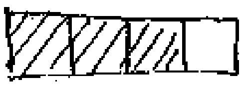
3-6 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 ; Supongamos que se tiene un grupo de cuatro estudiantes y se tiene una barra de chocolate, que se divide en cuatro partes iguales, pero por motivos equis, uno de ellos no asiste a la repartición, entonces ~~sal~~ la representación sería $\frac{3}{4}$

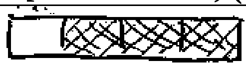
3-7 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 ∴ Bien nos queda $\frac{1}{4}$ del chocolate lo que quedaría del todo.

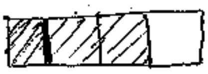
3-8 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $= 3/4$. tomo 3 de 4.

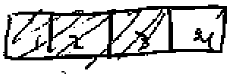
3-9 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $\frac{3}{4} \Rightarrow$ es tomar 3 de un total de 4

3-10 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $= \frac{3}{4}$ ⇒ es decir, tiene el significado Matemático, (tres cuartos)

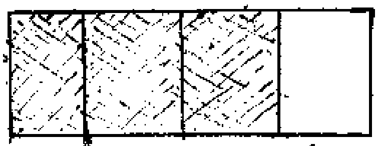
3-11 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 chocolate. $\frac{3}{4}$ significa que es una fracción el resultado.

3-12 **[EPC ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Que de la barra de chocolate del total significa q' tome 3/4 del total del chocolate.

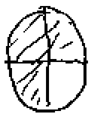
3-13 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 Esto quiere decir matematicamente, de una barra de chocola que está dividido en 4 partes iguales tres se toman y le queda solo 1 ⟹ sería 3/4

3-14 **[EPC ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	tres cuartos ⟹ $\frac{3}{4}$

3-15 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	$\frac{3}{4}$ 

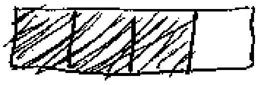
3-16 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	significa que se tomó 3/4 de todo el chocolate quedando solo 1/4 con lo cual sumando esas partes nos darian 4/4 es decir el chocolate entero 3/4 = 

3-17 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	→  – $\frac{3}{4}$ esto significa que toman 1 cada uno de los cuatro chocolas, y, que en total se toman 3 y que sobra una y esta fracción significa $\frac{3}{4}$ – los tomados – Particiones

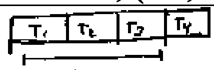
3-18 **[EPC ; (PC, V, SNf, SNp)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $\frac{3}{4}$, puedo interpretar como si hubiese tomado el 75% de 4, o [illegible] dejo la cuarta parte sin tomarla.- *3 partes de 4

3-19 **[EPC ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	$\frac{3}{4}$, Que es una fracción propia.

3-20 **[IE ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	4.  tomo 3+ - si tenemos un chocolate partimos en 4 = $\frac{1 - \text{chocolate}}{4 - \text{trozos de chocolate}}$ - y quitamos 3 trozos.- entonces sería una sustracción

3-21 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

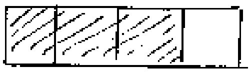
1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ En todo caso Tomó $\frac{3}{4}$ de la Barra de Chocolate.

3-22 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $\frac{3}{4}$ Se ha dividido la unidad; de un chocolate en cuatro partes y de ello se toma (~~tomo~~) tres partes

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 1
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO PARTE TODO CONTINUO
CUARTO NIVEL

4-1 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 Matemáticamente significa : $\frac{3}{4}$

4-2 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 una fraccion de $\frac{3}{4}$.

4-3 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $3/4$:

4-4 **[II ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Si tiene ud. cuatro trozos y tomas tres tendrás los $\frac{4}{3}$ de una barra de chocolate • El significado matemático sería 4 enteros divididos entre 3 partes de un total trozos  chocolate

4-5 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $= \frac{3}{4}$ Una fracción al particionar un todo en cuatro partes, de las cuales tomar 3 de las 4 partes.

4-6 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 lo ser puesta nordora $\frac{3}{4}$ [illegible]

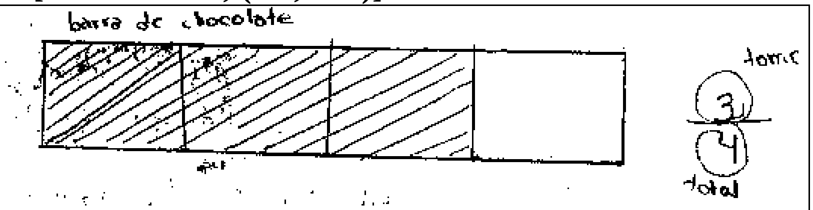
4-7 **[EPI ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $= \frac{4}{3}$

4-8 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 → trozo de Chocolate $TCH = \frac{3}{4}$.

4-9 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	

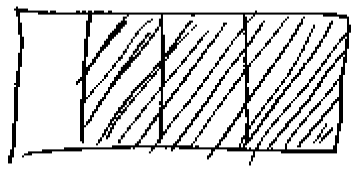
4-10 **[EPC ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	$\frac{3}{4}$ → sería tres cuartos

4-11 **[EPI ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 Significa que la tercera parte de un todo

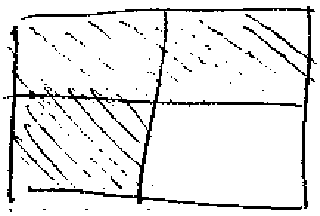
4-12 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $= \frac{3}{4}$

4-13 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ Tomé ~~los~~ 3 trozos de los 4 trozos que habían $\therefore$ Tomé $= \frac{3}{4}$ //

4-14 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 Significa que de un total estamos tomando la tres cuartas partes del todo $= \frac{3}{4}$

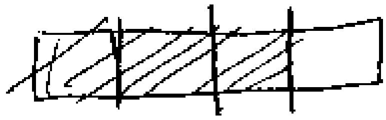
4-15 **[EPC ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	significa que una unidad vasa dividir en cuatro partes iguales de los cuales ~~boa~~ tomar 3 partes de los 4 osea $\frac{3}{4}$ //

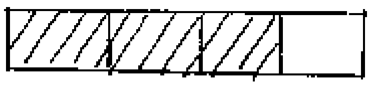
4-16 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Simbólicamente representado por 3/4 nos da la idea de tomar 3 de las 4 Partes iguales en las que fue dividido esa unidad de barra de chocolate Tomo 3 de 4  Divido en 4

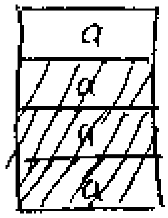
4-17 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $\Rightarrow \frac{3}{4}$

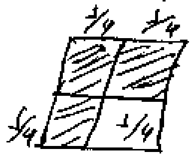
4-18 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $\frac{3}{4}$

4-19 **[EPC ; (PC, SNf)]**

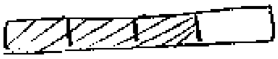
1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $= \frac{3}{4}$

4-20 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

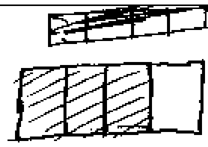
1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Significa que si el chocolate fue dividido 4 partes iguales solo me interesa tomar $\frac{3}{4}$ partes de $\frac{4}{4} = 1$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  $= \frac{3}{4}$

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 1
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO PARTE TODO CONTINUO
QUINTO NIVEL

5-1 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 Para mi tiene significado matemático $\frac{3}{4}$ 3 → Numerador, 4 → Denominador

5-2 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	~~Una~~ ~~Fracción~~: $\frac{3}{4}$ ~~Es~~ una fracción que equivale a $\frac{3}{4}$ 

5-3 **[EPC ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	- fraccionar un Todo en partes iguales y de los cuales extraer $\frac{3}{4}$ del Todo, lo cual indica que quedará $\frac{1}{4}$. Osea: Se tiene $1 \Rightarrow \frac{4}{4} \Rightarrow \underbrace{-\frac{3}{4}}_{\text{Sacamos}} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{queda}}$

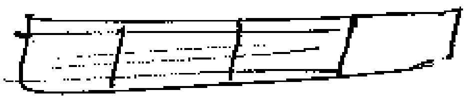
5-4 **[EPC ; (SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	3/4

5-5 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $\frac{3}{4}$ si tiene sentido de tomar las $\frac{3}{4}$ partes del chocolate

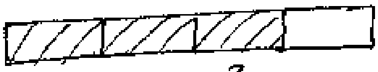
5-6 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 3/4 ✓

5-7 **[EPC ; (SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Es una Fracion: $\frac{3}{4}$

5-8 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $\frac{3}{4}$ Tomo o comio las $\frac{3}{4}$ partes de la barra del chocolate.

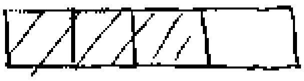
5-9 **[EPC ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Tiene el siguiente significado: $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ queda la cuarta parte del trozo de chocolate

5-10 **[EPC ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Significa que he tomado $\frac{3}{4}$ de un todo que es $\frac{4}{4}$

5-11 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $= \frac{3}{4}$

5-12 **[EPC ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	$\frac{3}{4}$; tomo la $\frac{3}{4}$ parte y hago sobrar la parte de $\frac{1}{4}$

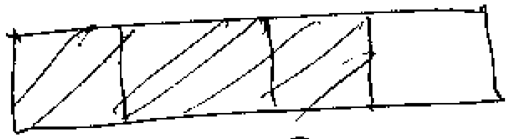
5-13 **[EPC ; (SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	$\frac{3}{4}$.

5-14 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Es una Fracción $\frac{3}{4}$ gráficamente 

5-15 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $= \frac{3}{4}$ La Fracción $\frac{3}{4}$

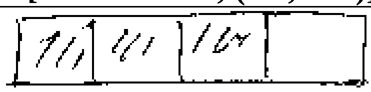
5-16 **[EPI ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Significa $\frac{3}{4}$ o sea tomo la tercera parte de un total

5-17 **[EPC ; (V, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	Que puedo simbolizarlo, $\frac{3}{4}$ que es una fracción, pues digo que tengo una unidad partida en cuatro y tomo tres ó de un entero tome las $\frac{3}{4}$ partes y ahora tengo solo $\frac{1}{4}$ parte que al sumarlos me da un entero otra vez $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

5-18 **[EPC ; (PC, SNf)]**

1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?	 $= 3/4$

A.3.2 Protocolos de Solución a la Situación Problema con Significado Parte-Todo Discreto.

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 2
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO PARTE TODO DISCRETO
TERCER NIVEL

3-1 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	todos son 7 personas ahora 3 chicos respuesta $\frac{3}{7}$ porque $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$

3-2 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Chicos = 3 Chicas = 4 TOTAL (AMIGOS) = 7	CHICOS $\frac{3}{7}$	CHICAS. $\frac{4}{7}$	

3-3 **[II ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{4}{3}$

3-4 **[EPI ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	La fracción de chicos es $\frac{7}{3}$

3-5 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{7}$

3-6 **[EPI ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	tres chicos cuatro chicas nueve amigos 3 chicos 4 chicas 9 amigos son chicos $\frac{3}{9}$

3-7 **[D ; (SNf, SA)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Sean: chicos =(V) chicas =(M) $V + M = 7$

3-8 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 chicos 4 chicas 7 amigos $\therefore$ $\frac{3}{7}$ son chicos.

3-9 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Rpta $\frac{3}{7}$ por que son 3 chicos y cuatro chicas $\Rightarrow$ total son 7 $\therefore$ 3 son chicos y total 7 $\Rightarrow$ $\frac{3}{7}$ es la fracción de acuerdo a la pregunta

3-10 **[II ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	tenemos la pregunta ¿Que fracción de grupo de amigos son chicos? $\Rightarrow$ 3 Chicos = 4 chicas. $\Rightarrow$ chicos = $\frac{4 \text{chicas}}{3}$. $\Rightarrow$ la fracción de grupo de chicos es igual al cuatro tercios de las chicas.

3-11 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{7}$. 3 chicos 4 chicas. los amigos son 7. Lo seria una fraccion. y se representa así

3-12 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	primero tomaremos el total q' son 7 donde se podra sacar una fracción $\frac{3}{7}$

3-13 **[II ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3/4 son tres cuartos, osea quiere de son 3 de las 4 chicas

3-14 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Chicos + Chicas = Grupo 3 + 4 = 7 chicos $\frac{3}{7} + \frac{4}{7}$ = Grupo Chicos ⇒ $\frac{3}{7}$ son tres de un grupo de 7 personas

3-15 **[EPC ; (PC, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{7}$ Rpta Amigos → 3 chicos, 4 chicas

3-16 **[EPI ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	si tenemos un grupo de amigos que podemos decir que es 1/7

3-17 **[EPC ; (PC, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 chicos 4 chicas ⇒ el total es 7 $\frac{3}{7}$ gráficamente  3 chicos 4 chicas

3-18 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 chicos, 4 chicas. $\frac{3}{7}$ del grupo son chicos.

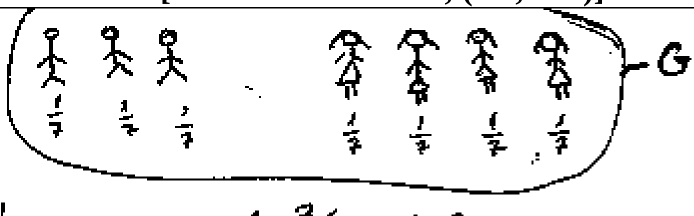
3-19 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 h 4 m 3 + 4 = 7 Personas $\frac{3}{7}$ de 7 personas 3 son chicos

3-20 **[EPI ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	si la Reunión es de Amigos = (7): 3 chicos 4 chicas. $\frac{7}{4}$ → grupo 4 → chicas.

3-21 **[EPC ; (PD, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	 los chicos son 3/7 del Grupo.

3-22 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	los chicos son los $\frac{3}{7}$ es decir son tres chicos de siete personas.

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 2
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO PARTE TODO DISCRETO
CUARTO NIVEL

4-1 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 chicos 4 chicas. 3 + 4 = 7 amigos. chicos = $\frac{3}{7}$

4-2 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3+4 = 7 = total personas. Chicos = $\frac{3}{7}$ son 3 chicos de un total de 7. personas

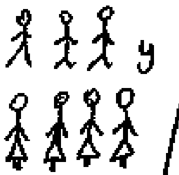
4-3 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	son de la fracción de amigos. Lo 3/7

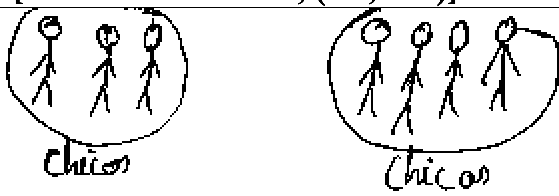
4-4 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	En la reunión de amigos: 3 chicos 4 chicas total 7 amigos la fracción de amigos lo mismo $\frac{3}{7}$ chicos Osea parte de un todo = 7 amigos.

4-5 **[EPC ; (PD, V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	 Si el total es igual a 7, donde tomo 7 elementos entre chicas y chicos. ⇒ como 3 son chicos. ∴ la fracción a tomar sería $\frac{3}{7}$; tomamos 3 chicos de los 7 elementos.

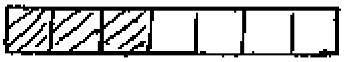
4-6 **[EPC ; (PD, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{7}$  $\frac{3}{7}$

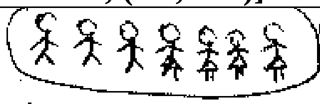
4-7 **[EPI ; (PD, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Ana Ani [illegible] [illegible] Juan Julio Juancarlos. $= \frac{7}{3}$

4-8 **[EPC ; (PC, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	TOTAL son 7 chicos/chicas  fracción seria: $\frac{3}{7}$.

4-9 **[EPC ; (PD, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	· 3 V. · 4 M } amigos = 7  Grupo de amigos chicos = $\frac{3}{7}$ .... $\frac{4}{7}$ chicos = 3/— .

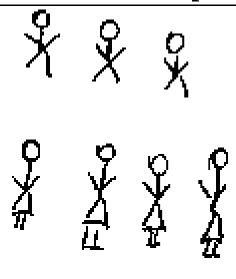
4-10 **[II ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{4}$ ó

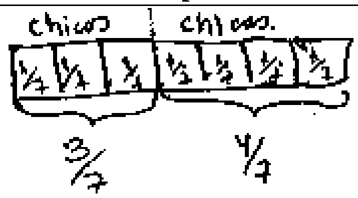
4-11 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Soi chicos son $\frac{3}{7}$ del grupo .

4-12 **[EPC ; (PD, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	 $= \frac{3}{7}$ total = 7 el grupo seia de amigos

4-13 **[EPC ; (PC, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	 chicos = $\frac{3}{7}$

4-14 **[D ; (------)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	

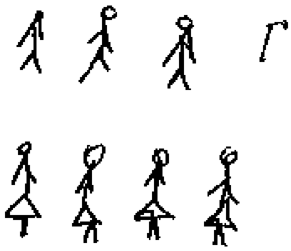
4-15 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 chicos 4 chicas. = 7 grupos $\frac{3}{7}$ chicos Rad.

4-16 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Si el total es 7 de los cuales 3 son chicos estamos hablando de $\frac{3}{7}$

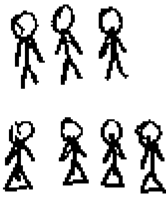
4-17 **[EPC ; (PD, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 V 4 M.  $\frac{3}{7}$ del Total de grupo son varones

4-18 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 chicos 4 chicas total=7 amigos. $\frac{3}{7}$ → fracción de chicos. $\frac{4}{7}$

4-19 **[EPC ; (PD, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	 > 3 → chicos 7 → TOTAL

4-20 **[EPC ; (V, SNf)]**

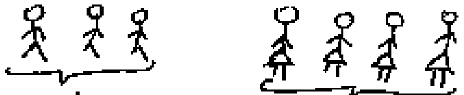
2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 : chicos 4 : chicas > 3+4 = 7 amigos. de 7; 3 son chicos => $\frac{3}{7}$ es la fracción que representa a 3 varones de un total de 7 amigos.

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 2
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO PARTE TODO DISCRETO
QUINTO NIVEL

5-1 **[EPI ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Son pues $\frac{3}{8}$ de amigos.

5-2 **[EPC ; (PD, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	 3 chicos 4 chicas = total 7 $\frac{3}{7}$

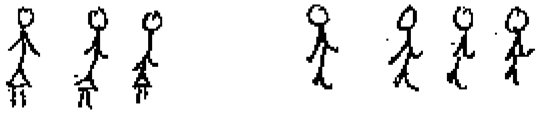
5-3 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	→ Sea : Chicas = 4 Chicos = 3 Total de personas = 7 → Luego : chicos son $\frac{3}{7}$ del total de amigos.

5-4 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{7}$ → Grupo de Chicos

5-5 **[EPI ; (PD, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	 $= \frac{4}{7}$ 7/

5-6 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{7}$ ✓

5-7 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{7}$: chicos:

5-8 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 chicos 4 chicas 7 amigos $\frac{3}{7}$ partes son chicos del grupo de amigos.

5-9 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	la fración del grupo de amigo que representa a los chicos es: $\frac{3}{7}$

5-10 **[EPC ; (V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	En total tenemos 7 personas (el todo) de los cuales tomamos 3 personas $\therefore$ $\frac{3}{7}$ representan a los chicos

5-11 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{7}$ = chicos

5-12 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Total = 7 Chicos ~~amigos~~ = $\frac{3}{7}$

5-13 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{7}$

5-14 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Los chicos = $\frac{3}{7}$ del grupo

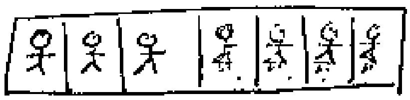
5-15 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	$\frac{3}{7}$

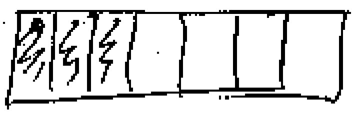
5-16 **[EPC ; (SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 chicos + 4 chicas = $\frac{3}{7}$

5-17 **[EPC ; (PD, V, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	3 chicos 4 chicas $\frac{3}{7}$ chicos $\frac{4}{7}$ chicas supongamos que el grupo entero es 7 entonces. $\frac{7}{7} = 1$ 

5-18 **[EPC ; (PC, SNf)]**

2) Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué fracción del grupo de amigos son chicos?	Chicos = 3 Chicas = 4 total grupo = 7 Rpt. 3/7 

A.3.3 Protocolos de Solución a la Situación Problema con Significado de Cociente

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 3
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE COCIENTE
TERCER NIVEL

3-1 **[II ; (SNf, SA)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	A Cada uno le corresponde 3/5 de chocolate de manera equitativa ∴ $\frac{3}{x} = 5 = x = \frac{3}{5}$

3-2 **[EPC ; (SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	N = 5 Repartirlo a 3 5 + 1 = 6 (Para que sea exacto) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$ 1 ∴ c/u = $2 - \frac{1}{3}$ //

3-3 **[EPC ; (SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{\frac{5}{3}}{3}$ = 1.7 ≈ $\frac{15}{3\ 3}$ = 1,7 de chocolates

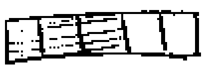
3-4 **[EPC ; (SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{5}{3}$ → chocolates / → Amigos la fracción $\frac{5}{3}$ 5 ⌊3 3 1,6 20 18 20 — A un amigo le corresponde 1,6 =

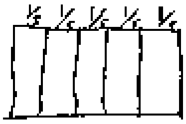
3-5 **[IE ; (SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	5 ⌊3 3 1.6666.. 20 2 a cada uno le tocaría 1.6666 de chocolate.

3-6 **[II ; (PC, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{3}{5}$ = 

3-7 **[II ; (PC, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	1/5 1/5 1/5 1/5 1/5  Entonces a cada ~~alumno~~ amigo le tocará 1/5 del total del chocolate

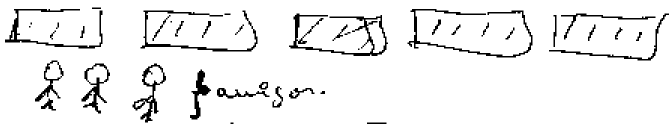
3-8 **[EPC ; (SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$5 \lfloor 3 \quad \cong \quad \frac{5}{3}$ $1,66\bar{6}$ chocolates

3-9 **[EPI ; (SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	Si 3 amigos quieren repartirse 5 chocolates ⇒ a cada uno le correspondería. $\frac{3}{5}$ de chocolate

3-10 **[EPC ; (PC, PD, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 5 chocolates 3 amigos. 5 |3 2 1.66. 20 18 2 ⇒ planteando tenemos $\frac{5}{3} = 1.66....$ ó $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ Rpta.

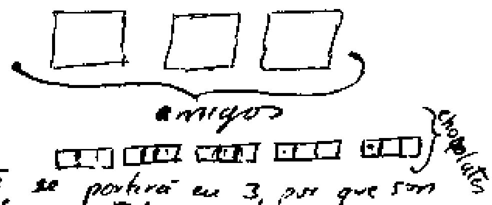
3-11 **[II ; (PC, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	3 amigos 5 chocolates  $\frac{3}{5} = 0,6$ a cada amigo les tocaría 0,6. 1 amig 1 amig 1 amigo  5 ch. 30 |5 30 0,6

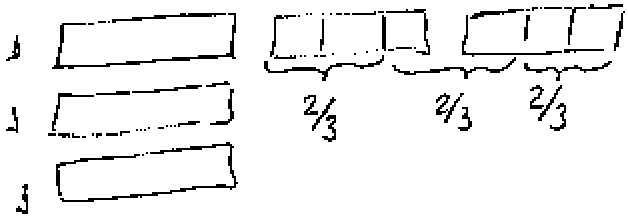
3-12 **[EPI ; (V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	A cada amigo que son 3 le tocaría un total de un chocolate y la división de chocolate de 3 q' fue dividido a 4. osea 1 3/4

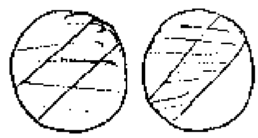
3-13 **[EPC ; (PC, PD, V, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 => osea cada chocolate se partirá en 3, por que son 3 amigos : lo cual es 5/3 5 ⌊3 ; 3 ; 20 ; 1.666 = 1.6 eso esta cantida que le toco a cada uno :

3-14 **[EPC ; (PC, PD, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	5 chocolates ÷ 3 = 1 + 2/3 = 5/3 

3-15 **[EPC ; (PC, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	3 amigos 5 chocolatas. => 5/3  5 ⌊3 ; 3 ; 20 ; 18 ; 20 ; 1,66 ; 9 ; 6/90 ; 1 6/9 ; 15/9 ; 60 Rpta le corresponde 16/9 de chocolate

3-16 **[EPC ; (V, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	5 chocolatas les corresponde 1 entero y parte 2/3 … : 6/3 5 ⌊3 ; 3 ; 20 ; 18 ; 2 ; 1,666. 1,666/0,999 = 1 2/3

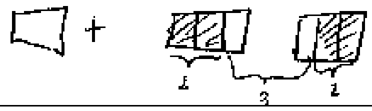
3-17 **[IE ; (V, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	3 amigos 5 chocolats => hay 5 enteros y que daven repartir los 3 5 ⌊3 ; 3 ; 20 ; 1,6 => deben de repartirse un Entero y un resto a 2 de Cada uno

3-18 **[EPI ; (SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{3}{5}$, le corresponde a cada amigo 0,6 de chocolate.

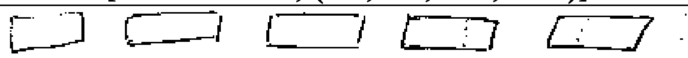
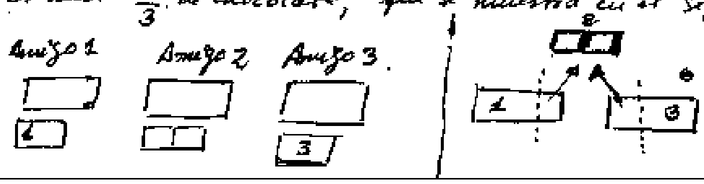
3-19 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	3 amigos. 5 chocolates $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, un entero y las dos partes de un chocolate dividido en 3 partes 

3-20 **[EPC ; (V, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	Si tenemos: $\frac{5}{3} = 1,6\bar{6}\ldots$ $\Rightarrow$ Le tocaría un 1 chocolate con más de la mitad

3-21 **[EPC ; (PC, PD, SNf, SNd)]**

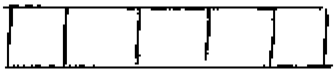
3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 a cada amigo le corresponde $1,\overline{66}$ chocolates, es decir $\frac{5}{3}$ de chocolate, que se muestra en el siguiente gráfico. 

3-22 **[EPC ; (SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	Se divide 5 chocolates entre tres amigos $\frac{5}{3} = 1,\bar{6}$ $\Rightarrow$ A cado uno le corresponde. $1,6\bar{6}$

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 3
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE COCIENTE
CUARTO NIVEL

4-1 **[EPC ; (PC, SNf]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 CHOCOLATES . 3 AMIGOS . A cada uno le corresponde : $\frac{5}{3}$

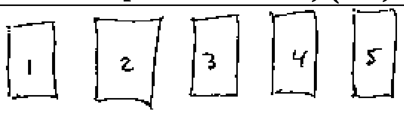
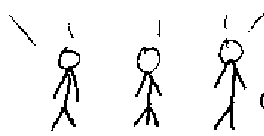
4-2 **[EPC ; (PC, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 $\frac{5}{3} = 1.66.$ le toca a cada amigo. 1 chocolate y 0,66 del mismo. 5 |3 ; 3 1,66 ; 20 ; 18 ; 20, 20|3 0,6.

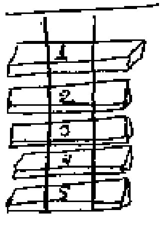
4-3 **[EPC ; (SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	significa matemáticamente 5/3 a cada uno osea le corresponde 5/3 = 1,6 a cada uno.

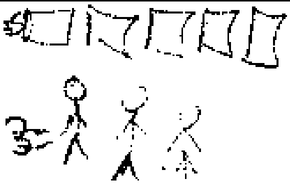
4-4 **[EPI ; (PC, PD, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 chocolates $\frac{3}{5} = 1.7$  amigos cada uno a $\frac{2}{3}$ Se repartirán 1

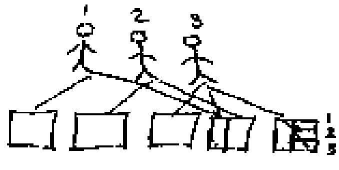
4-5 **[EPI ; (PC, V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	3 amigos 5 chocolates  - los 5 chocolates los particionamos en unidades equitativamente - Como tenemos 15 partes o unidades al particionar los 5 chocolates. ⇒ dividimos $\frac{15}{3}$ que es igual a 5 ; entonces a los tres amigos les tocará 5 partes o porciones particionadas de los 5 chocolates que teníamos en un principio.

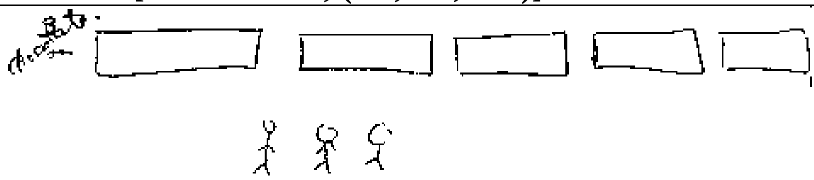
4-6 **[EPI ; (PC, PD, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 $\frac{3}{5} = 0.6$ $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{12}{20}, \frac{24}{40}$

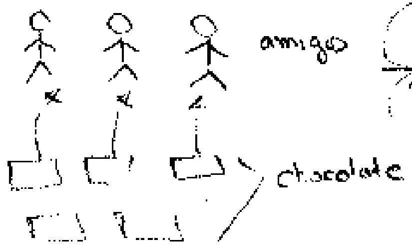
4-7 **[EPI ; (PC, PD, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 $\frac{1}{6}$ a cada uno.

4-8 **[EPC ; (PC, PD, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 $= \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

4-9 **[EPC ; (PC, PD, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 cantidad de chocolates amigos $\frac{5}{3} = 1,\overline{6}$ chocolate a total de amigos

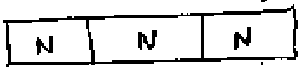
4-10 **[D ; (SNf, SA)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	a = 3 ch = 5 > seria a = amigos ch = chocolates $(a)(ch) = (3)(5) = 15$ significa a cada amigo corrupende 5 chocolates.

4-11 **[EPC ; (SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{5}{3}$ corresponde a cada uno de los amigos.

4-12 **[EPI ; (PC, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	3 amigos 5 chocolates $\Rightarrow \frac{5}{3}$ a cada uno de los amigos le corresponde una cantidad equitativa de 1.6 de chocolate  $\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

4-13 **[EPC ; (PC, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{5}{3} =$  $1 \frac{2}{3}$

4-14 **[EPC ; (SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{5}{3}$ de chocolate le corresponde

4-15 **[EPC ; (V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	A cada uno $1 \, 2/3$ de chocolate. o/ a cada uno les toco : un chocolate y 2 partes de las 3 partes total.

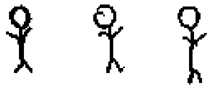
4-16 **[EPC ; (V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	dividiendo $\frac{5}{3}$ les correspondería además de 1 chocolate por persona $\frac{2}{3}$ (dos terceras partes de chocolate $\frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}$

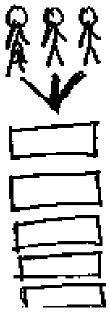
4-17 **[EPC ; (V, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	3 A. 5 CH. $\frac{5}{3}$ $\Rightarrow \frac{5}{3} = 1,\hat{6}$ $\Rightarrow$ a cada uno le corresponde $1,\hat{6}$ a cada uno. ⊕ le corresponde a cada uno 1 chocolate mas 2/3 de chocolate

4-18 **[EPC ; (PD, V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 $\frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1$, residuo 2 $= 1\frac{2}{3}$ Rpta.: A cada amigo le va a tocar 1 tableta entera de chocolate + 2/3. y así se repartirían equitativamente.

4-19 **[EPC ; (PC, PD, V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 le corresponde a cada uno $1\frac{2}{3}$ de chocolate (un entero con dos tercios de chocolate)

4-20 **[EPC ; (V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	primeramente dividieron $5 \div 3 = 1$ entero $+ \frac{2}{3}$ es decir tendran a un entero y los 2 chocolates restantes tendran q' dividirlos en partes iguales y completar su repartición. Proporcionalmente a cada uno les toca a: $1\frac{2}{3}$

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 3
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE COCIENTE
QUINTO NIVEL

5-1 **[EPC ; (PD, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	Entonces a cada amigo le toca equitatamente a 5/3  5 chocolats $1+\frac{2}{3}=\frac{3+2}{3}=\frac{5}{3}$ ¿. A cada amigo le correspon 5/3

5-2 **[EPC ; (SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{5}{3}$ = Aprox. 1,666 se reparten a ~~...~~ $1+\frac{6}{10}$ 5 | 3 ; 1,66.... ; 3 ; 20 ; 18 ; 20 ; 18 ; 2 $\frac{1}{6}$ 0,6 $\frac{6}{10}$

5-3 **[EPC ; (V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	→ Total de chocolates 5 → amigos 3 → hagamos : $\frac{\text{Total chocolates}}{\text{Total amigos}}=\frac{5}{3}=\frac{3}{3}+\frac{2}{3}$ $=1+\frac{2}{3}$ ~~osea~~ → a cada amigo le corresponde $1\frac{2}{3}$ o

5-4 **[EPI ; (SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$1\frac{1}{3}$

5-5 **[EPC ; (PD, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{5}{3}$ → este es una fracción donde el numerador es mayor que el denominad.

5-6 **[IE ; (V, SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	⇒ 5 | 3 ; 3 1,66 ; 20 ; 18 ; 20 . ⇒ $1,\overline{66}$ = acada uno . acada uno corresponde: un chocolate con $\frac{1}{2}$.+1 chocolate.

5-7 [**EPI** ; **(SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos	$1\frac{1}{2}$ chocolate, pues: $3 \times 1\frac{1}{2} =$

5-8 [**EPI** ; **(SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	3 → amigos 5 → chocolates las $\frac{3}{5}$ partes para cada uno

5-9 [**D** ; **(SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	#Total de chocolates = 5 #total de amigos = 3

5-10 [**EPC** ; **(V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	Dividimos cada chocolate en tres partes iguales es decir $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$ como son cinco chocolates multiplicamos por 5 a cada parte es decir $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{3}$ ∴ a cada amigo le toca 5/3

5-11 [**EPC** ; **(SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{5}{3}$

5-12 [**EPI** ; **(V, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	amigos = 3 chocolate = 5 Cada chocolate lo parto en 3; de los 5 obtengo 15 pedazos luego: a cada uno le corresponde $\frac{5}{15}$

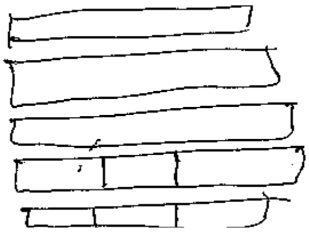
5-13 **[IE ; (SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	5 |3 3 1,666 2 0 1 8 2 1,6

5-14 **[IE ; (V, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	5 |3 20 1,66. 18 2 A cada uno le toca a 1 chocolate Mas. el 0,66.. parte de un chocolate.

5-15 **[EPC ; (PC, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 $1 + \frac{2}{3}$ $= \frac{5}{3}$

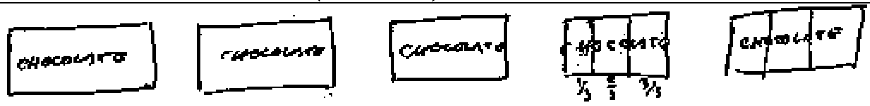
5-16 **[IE ; (PD, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	3 amigos  5 |3 3 1.6 20

5-17 **[EPC ; (SNf, SNd)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	$\frac{5}{3}$ = 5 |3 3 1.666 20 18 20 a cada uno le tocara entonces 1,66 que en fracción es. $1\frac{6}{9}$

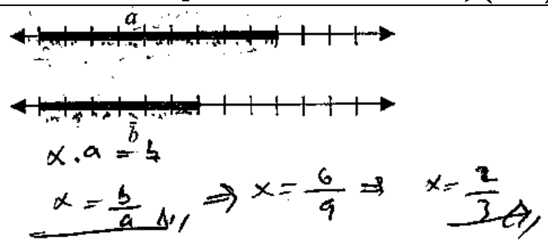
5-18 **[EPC ; (PC, SNf)]**

3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?	 Le corresponde: $1\frac{2}{3}$ a cada uno.

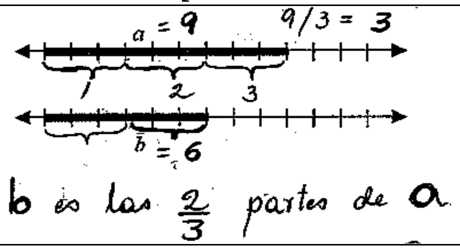
A.3.4 Protocolos de Solución a la Situación Problema con Significado de Medida

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 4
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE MEDIDA
TERCER NIVEL

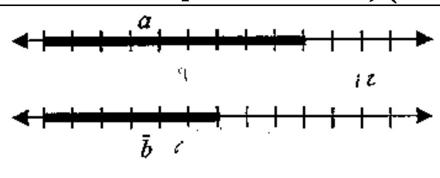
3-1 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

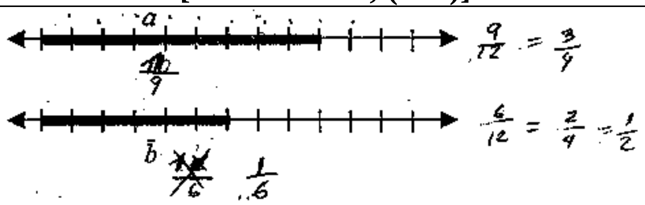
3-2 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

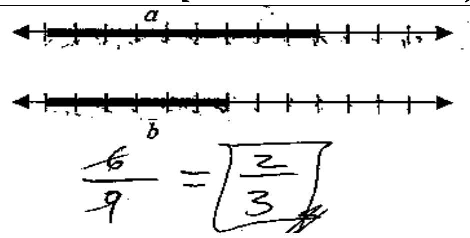
3-3 **[D ; (----)]**

44) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

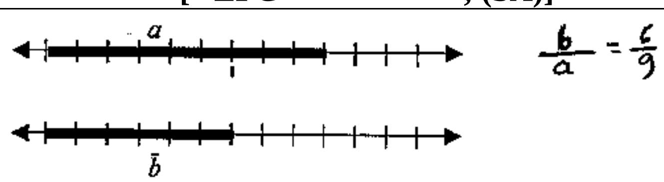
3-4 **[II ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

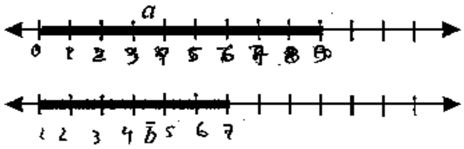
3-5 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

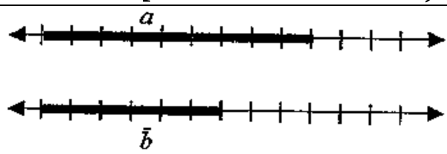
3-6 **[EPC ; (SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

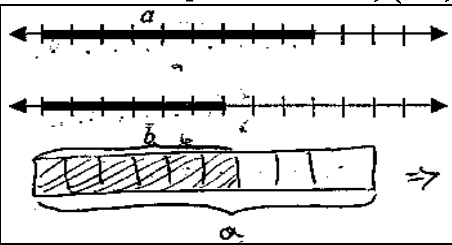
3-7 **[EPI ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $7/9$ Rpta

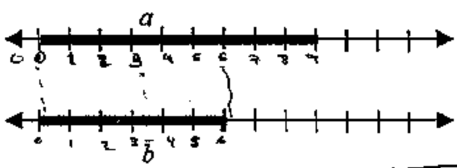
3-8 **[EPC ; (SNf, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{5}{a} \Rightarrow 6/9 \cong \frac{2}{3}$

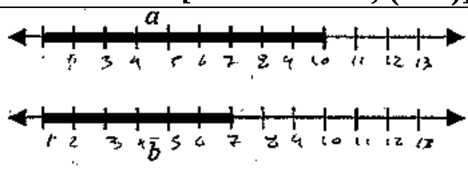
3-9 **[II ; (PC, SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\Rightarrow \frac{3}{9}$ es b

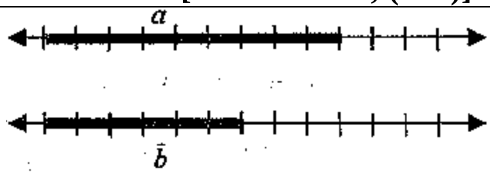
3-10 **[EPI ; (SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{9a}{6b}$ = es igual al @ $\Rightarrow \boxed{a = \frac{6b}{9}}$

3-11 **[EPI ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 sera entero $\frac{7}{10}$

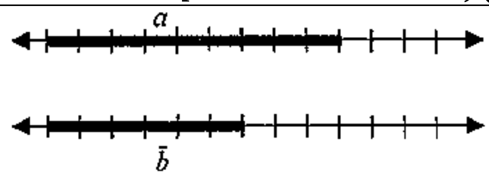
3-12 **[EPI ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 a es $\frac{7}{10}$ de b.

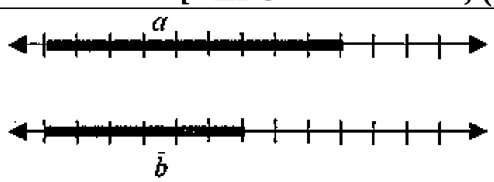
3-13 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $6/9 = 2/3$

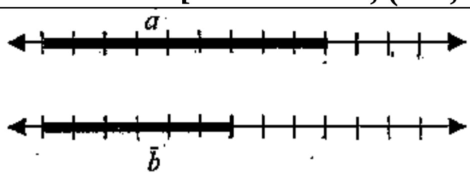
3-14 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{6}{9}$

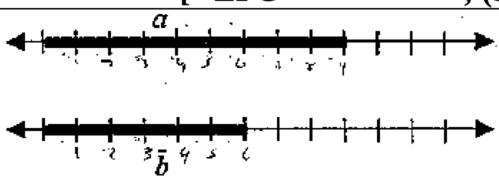
3-15 **[EPC ; (SA)]**

44) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 3 2 $b = \frac{2a}{3}$

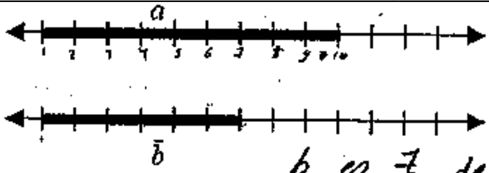
3-16 **[IE ; (SNf, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $a - b = 3/4 - \frac{2}{4}$ $a = 3/4$ $b = 2/4$

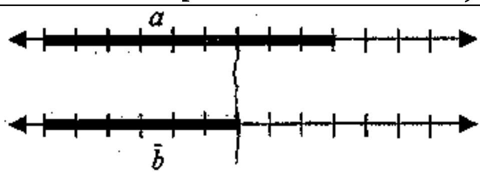
3-17 **[EPC ; (SNf, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{b}{a}$ $\frac{b - \text{parte}}{a - \text{total}} = \frac{6}{9}$

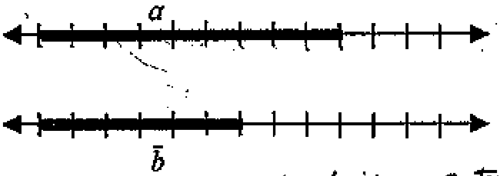
3-18 **[EPI ; (SNf, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 b es $\frac{7}{10}$ de $a \Rightarrow \boxed{b = 0.7a}$ $\frac{7}{10}$

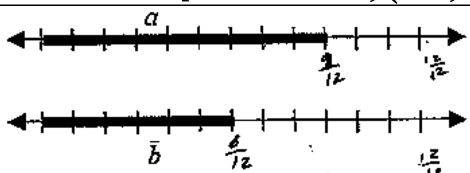
3-19 **[EPC ; (V, SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $= \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $\frac{6}{9}$ ó $\frac{2}{3}$ de 9 partes de a, 6 es b

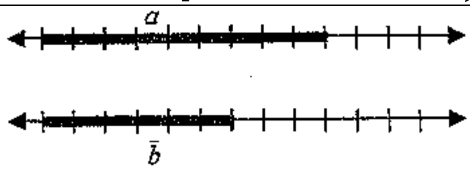
3-20 **[EPC ; (V, SNf, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{a}{b}$ si $a = 1$ y esta dividido en 9 trazos y b esta dividido en 6 trazos – $\Rightarrow$ $\frac{9}{6} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ de $1 = a$.

3-21 **[II ; (SNf, SA)]**

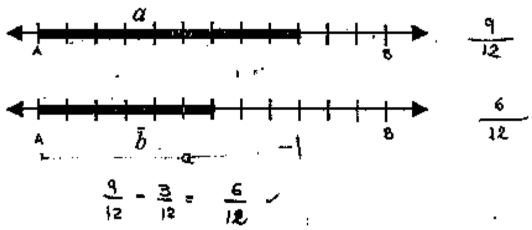
4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{a}{b} = \frac{\frac{9}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{(12)(9)}{(12)(6)} = \frac{3}{2}$ Rpta.

3-22 **[EPC ; (SNf, SA)]**

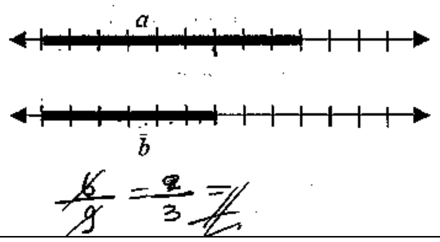
4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $a = 9$ $b = 6$ b representa los $\frac{2}{3}$ de a $\Rightarrow$ $b = \frac{2}{3}a$ $\quad b = \frac{2}{3}(9) \Rightarrow b = 6$

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 4
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE MEDIDA
CUARTO NIVEL

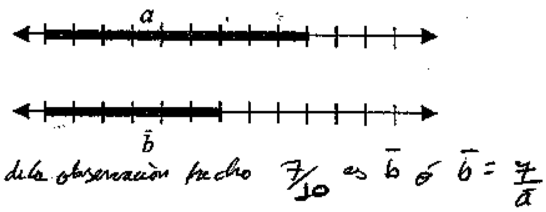
4-1 **[IE ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

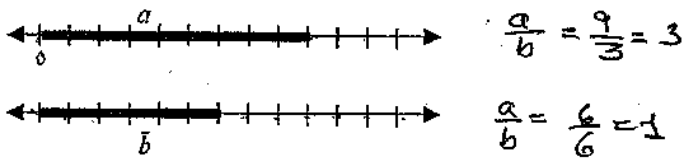
4-2 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

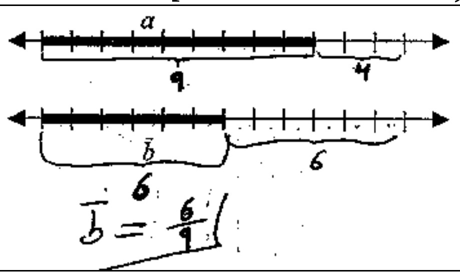
4-3 **[EPI ; (SNf, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

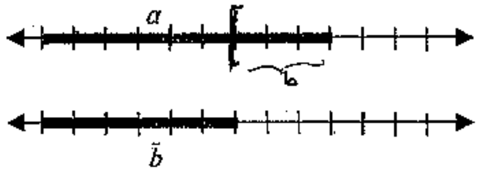
4-4 **[II ; (SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

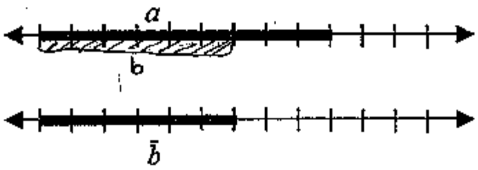
4-5 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

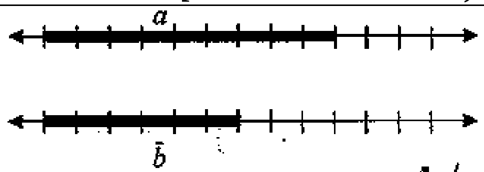
4-6 **[II ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 De la parte a es $\frac{3}{10}$

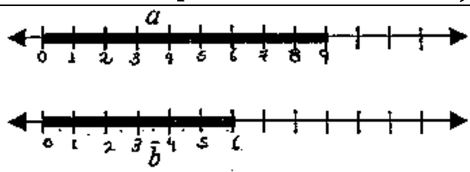
4-7 **[II ; (PC)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

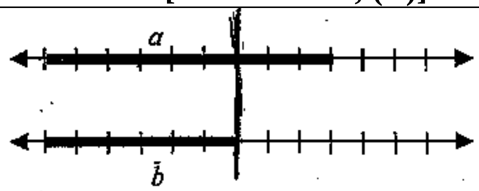
4-8 **[EPC ; (PC, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	  → el todo es $\bar{a}$ → $\bar{b}$ es la parte sombreada $\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{6}{9}$

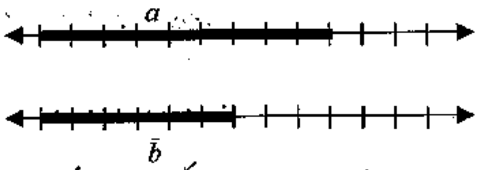
4-9 **[EPC ; (SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $b = \frac{6}{9}a$

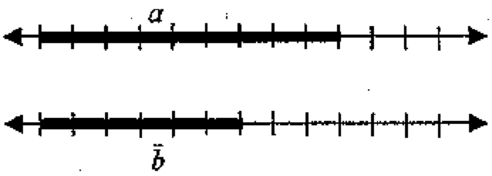
4-10 **[II ; (V)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 - La parte de $\bar{b}$ en $\bar{a}$ es la séptima parte de la recta sombreada.

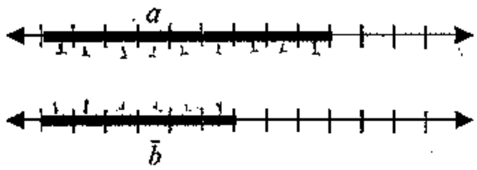
4-11 **[EPC ; (SNf, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $= \frac{9}{14}$ $= \frac{6}{14}$ $= \frac{b}{a} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

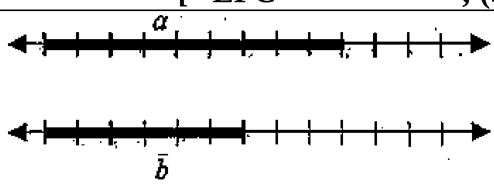
4-12 **[II ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $= \frac{9}{12}$ $= \frac{6}{12}$ $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ $\frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

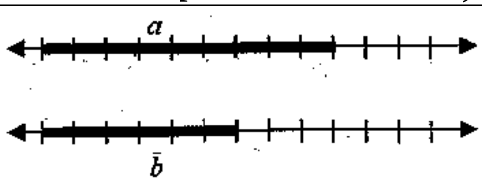
4-13 **[EPC ; (SNf, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 es $= \frac{b}{a} = \frac{6}{9} <> \frac{2}{3}$ es la $\frac{2}{3}$

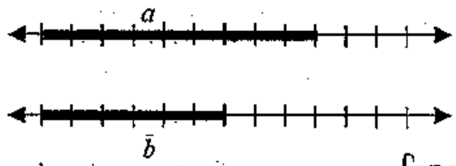
4-14 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{2}{3}$

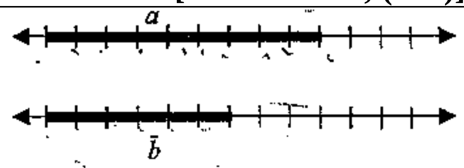
4-15 **[EPC ; (SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 a= 9/12 b= 6/12 b = 2/3 de a

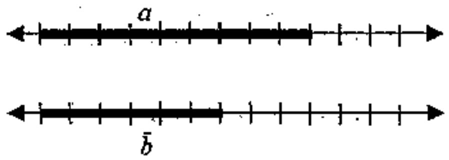
4-16 **[EPC ; (SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 si $a = 9$ unidades y $b = 6$ unidades } Concluimos que b es 2/3 de a

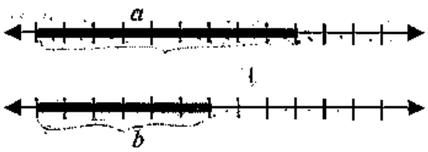
4-17 **[II ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{1}{7}$

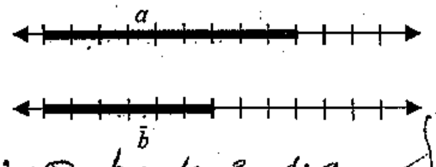
4-18 **[IE ; (SNf)]**

44) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $= \frac{9}{12}$ $= \frac{6}{12}$ $\frac{9}{12} - \frac{6}{12} = \frac{3}{12}$

4-19 **[II ; (SNf)]**

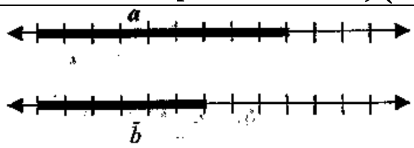
4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $= \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $\Longrightarrow \frac{3}{4} / \frac{1}{2} =$

4-20 **[EPC ; (SNf, SA)]**

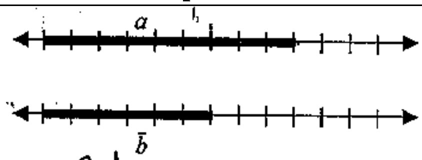
4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{b}{a} = \frac{6}{9}$ que equivale a : $\frac{2}{3}$ $\therefore$ b es los $\frac{2}{3}$ de a.

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 4
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE MEDIDA
QUINTO NIVEL

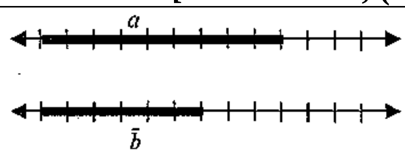
5-1 **[EPI ; (SNf, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 la b es la sexta parte de la b $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ∴ $b = \frac{3}{2}a$

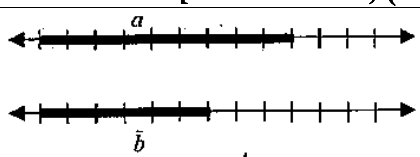
5-2 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{6}{9}$ b es a

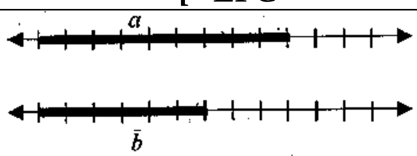
5-3 **[EPI ; (SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $b = \frac{7}{10}$ de a. osea, $b = \frac{7}{10}a$

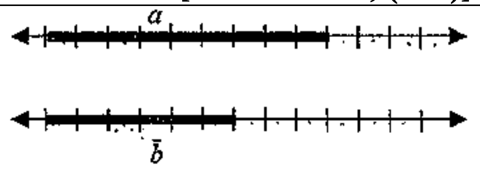
5-4 **[II ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{9}{12}$ $\frac{6}{12}$ es un $\frac{1}{4}$

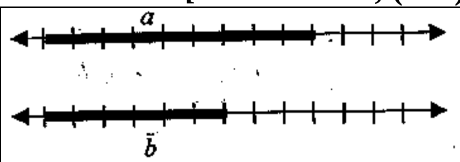
5-5 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $b = \frac{6}{9} =$

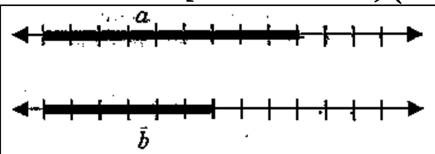
5-6 **[II ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $= \frac{9a}{13}$ $= \frac{6b}{13}$

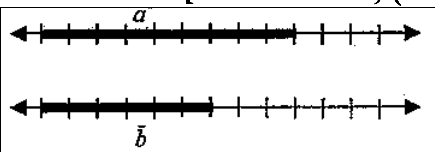
5-7 **[II ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $9/12$ $6/12 = 1/2$

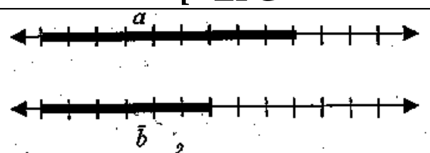
5-8 **[II ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $= \frac{12}{9}$ $= \frac{12}{6}$ $\frac{9}{6}$ es la parte b en a

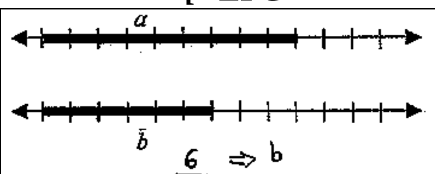
5-9 **[EPI ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 b es $\frac{7}{10}$ de a

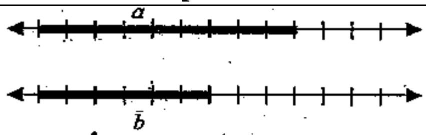
5-10 **[EPC ; (SNf, SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{b}{a} = \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ b es lo $\frac{2}{3}$ de a

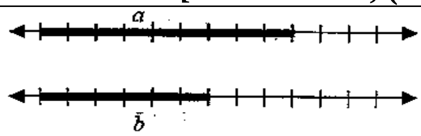
5-11 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{6 \Rightarrow b}{9 \Rightarrow a}$

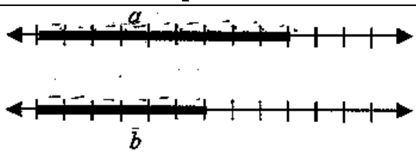
5-12 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{6}{9}$

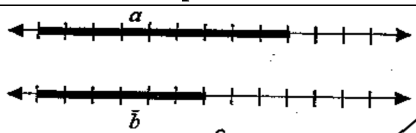
5-13 **[EPI ; (SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{9a}{6b} = \frac{3a}{2b}$

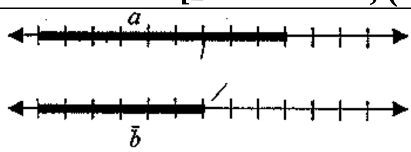
5-14 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $> \frac{6}{9}$ De a) $\frac{2}{3}$ partes.

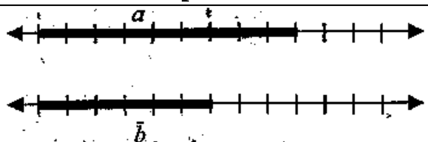
5-15 **[EPC ; (SA)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{b}{a} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

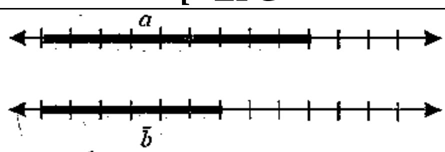
5-16 **[D ; (----)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	

5-17 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $a = 9$ $b = 6$; $9 - 1$ $6 - x$; $\frac{6}{9}$ de a es b ó $\frac{2}{3}$ de a

5-18 **[EPC ; (SNf)]**

4) De la observación de la figura. ¿Qué parte del segmento $\bar{a}$ es el segmento $\bar{b}$?	 $\frac{6}{9}$

A.3.5 Protocolos de Solución a la Situación Problema con Significado de Razón

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 5
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE RAZÓN
TERCER NIVEL

3-1 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	La Cantidad de libros de investigación es $\frac{4}{9}$ que representa el número de libros

3-2 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$N = 9 \begin{cases} X = 5 = \text{Matematicas } \frac{5}{9} \\ Y = 4 = \text{Investigación } \frac{4}{9} \end{cases}$ Hay menos libros de Investigación que de Matemáticas.

3-3 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	En fracción represento $\frac{9}{5}$, $\frac{9}{4}$ = $\frac{36, 45}{20}$

3-4 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\frac{9}{4}$ de investigación. De un total de nueve libros la fracción que representa nueve ~~fracción~~ cuartos Libro de matemática $\frac{9}{5}$ De un total

3-5 **[EPC ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	# de Libros de Matemáticas $= \frac{5}{9}$ # de libros de Investigación $= \frac{4}{9}$ $\frac{\#\ \cancel{Lo}\ \text{Investigación}}{\#\ \text{Libros de Matemática}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4 \times \cancel{9}}{5 \times \cancel{9}} = \boxed{\frac{4}{5}}$

3-6 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	Se puede decir lo siguiente, cuatro libros son de investigación de un total de nueve libros. $= \frac{4}{9}$ Total 9 libros 5 Matemá 4 Investig

3-7 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$M+I=9$ $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=\frac{9}{9}=1$ ∴ hay 4/9 del total de libros es de investigación

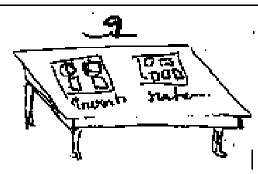
3-8 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\boxed{5/9 > 4/9}$ ✓ es decir que hay más libros de matemática al de investigación

3-9 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	5 matemática } total 9 4 investigación de los libros de investigación se podrá decir $\frac{4}{9}$ " " " Matemática " " $\frac{5}{9}$ //

3-10 **[EPI ; (PD, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	⇒ podemos decir de los libros de Investigación respecto al numero de libros de Matematica 1 libro de Investigación es a $\frac{5}{4}$ de libros de Matemática.  4 lib. inv. = 5 libros de Matem. Libros de Invest. = $\frac{5}{4}$ Libros de M

3-11 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	9 libros de los cuales 5 son de matemáticos 4 son de investigación. de investigación es de menor cantidad. de matemáticos es de mayor cantidad $I=\frac{4}{9}$ $M=\frac{5}{9}$

3-12 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	diremos que $\frac{5}{9} < \frac{4}{9}$ la cantidad de libros de matemática es mayor a de investigación

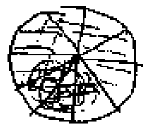
3-13 **[EPC ; (PC, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	 $\frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$ ⇒ la cantidad de libros de investigacion es una parte de 5 libros de matemática, lo que viene ser 4/5

3-14 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	de 9, 5 son de Matemática ⇒ $\frac{5}{9}$ de 9 de 9, 4 son de Investigación ⇒ $\frac{4}{9}$ de 9

3-15 **[EPI ; (PC, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	total libros = 9  libros de matemática = 5 libros de investigación = 4 Se puede decir de los libros de investigación son ~~tres~~ cuatro partes de las cinco partes que son los libros de matemática.

3-16 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	que hay un [illegible] 1/5 de libros de matemática y un 1/4 de libros investigación

3-17 **[II ; (PC, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	9 libros total 5 son matemática 4 de investigación → en menos en $\frac{1}{9}$ o en un libro menos que el de matemática → $\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9} > \frac{4}{9} \rightarrow \frac{1}{9}$ homogénea

3-18 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	5 mat. 4 invest. investigacion $\frac{4}{9}$ con respecto matemática $\frac{5}{9}$ 0.4 0.5 que hay menos libros de investigación que libros de matemática

3-19 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	9 libros 5 de matemática 4 de investigación que de ~~...~~ → $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$ q "la fracción de libros de matemática es mayor que la fracción de libros de investigación"

3-20 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\frac{9}{5}$ = Matemática $\frac{9}{4}$ = Investigación

3-21 **[II ; (PC, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	 Rpta: que. $\frac{4}{9}$ del total de libros constituye. a comparación ~~de~~ la de matemática que es $\frac{5}{9}$ o se puede decir también que $\frac{4}{9} < \frac{5}{9}$

3-22 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	los libros de investigación son en menor cantidad a comparación de los libros de matemática $M = \frac{5}{9}$ $I = \frac{4}{9}$

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 5
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE RAZÓN
CUARTO NIVEL

4-1 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	TOTAL = 9. MATEMÁTICA : 5 INVESTIGACIÓN 4. $\frac{4}{9}$ LIBROS DE INVESTIGACIÓN DE $\frac{5}{9}$

4-2 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	9 libros = 5 matem. 4 investigac. NL.I = $\frac{4}{9}$. Nº LM = $\frac{5}{9}$

4-3 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	Que en una cantidad de libros que es 9 $\frac{5}{9}$ son de matemáticas y $4/9$ de investigación que la suma de estos dos quebrados o fracciones [illegible] la 9 libros

4-4 **[D ; (PC, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	 9 libros 5 libros de Mat. 4. libros de inest. El numero de libros de investigacion es mayor a los libros de Mat.

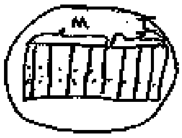
4-5 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	9 libros 5 mat. 4 Invt. – Que los libros de investigación son menor que los de matemática. – Que los libros de Investigación son una fracción o una porción de 4 en un total de 9 libros existentes con respecto a la otra porción de 5 libros de matemática que en conclusión es $\frac{4}{9}$/.

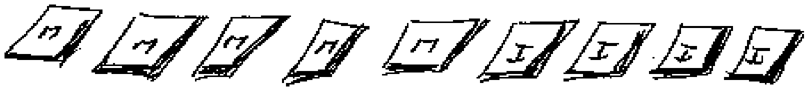
4-6 **[EPC ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\frac{4}{5}$ 4 → Libros de investigación 5 → " de matematicas El total = 9 libros

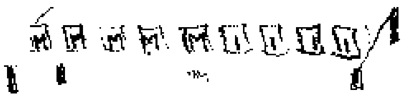
4-7 **[II ; (PC, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	 . de un 9 libros una $\frac{9}{5}$ es de matematica y el resto es de investigación $\frac{9}{5}$ matematica $\frac{9}{4}$ Investigación

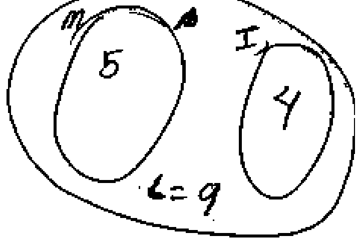
4-8 **[II ; (PD, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	 $I = \frac{4}{9}$. $m = \frac{5}{9}$

4-9 **[II ; (PD, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	 El total de libros menos la cantidad de libro de matematica es el # de libro de investigación # libros de investigación del total de libros $\frac{4}{9} = \frac{9}{9} - \frac{5}{9}$ total de libros # de libros de matemática del total de libros

4-10 **[EPI ; (SNf, SA, DV)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$l = 9$ $m = 5$ $I = 4$ $l = 9\ \frac{5}{4} =$ $N = 9$ $(m)(I) = (5)(4) = 20$ 

4-11 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\frac{4}{9}$ ~~[illegible]~~ son libros de investigación. $\frac{5}{9}$ son libros de matematicas.

4-12 **[EPC ; (PC, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	libros = 9 5 libros so Matematico 4 libros de investigacion $\frac{5}{9}$ ~~Matematica~~ $\frac{4}{5}$ libros M M M M M I I I I

4-13 **[EPC ; (SA)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\frac{I}{M} = \frac{4}{5}$

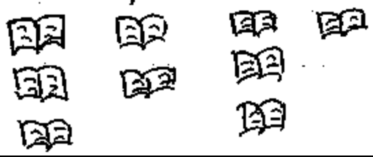
4-14 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\frac{5}{9}$ del libros de matematica con respecto $\frac{4}{9}$ de los libros de investigación

4-15 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	- hay menos Libros de investigacion $(\frac{4}{9})$ que de matematica $(\frac{5}{9})$. $\frac{4}{9} < \frac{5}{9}$

16 **[II ; (PD, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	Considerando siempre en base al total de 9 libros de los que 4 son de investigación diremos que estos son 4/9 del total  $\frac{4}{9}$

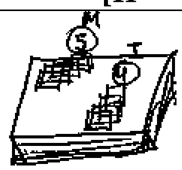
4-17 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	9 Libros 5 matemáticas 4 investigación Lo que se puede decir: es: $\frac{9}{5}$: de un total de 9 5 son de matematicas.

4-18 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	5 Matemática $\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$ 4 Inventigación total de libros = 9

4-19 **[II ; (PD, V, SNf, SNp)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	 Total = 9 libros $4 \longrightarrow$ libros de investigación $=$ $9 \longrightarrow$ Total de libros Se puede decir que 44% es libro de investigación (variable discreta) osea ENTEROS

4-20 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	Se puede decir que los $\frac{4}{9}$ del total de libros de la mesa son de. Investigación y los restantes $\frac{5}{9}$ son de Matemática de modo que 5 libros de Matematica mas 4 libros de Inv. nos dan como resultado los 9 libros de la mesa.

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 5
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE RAZÓN
QUINTO NIVEL

5-1 **[D ; (V)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	9 libros 5 son de matematica — 4 son de investigación Entonces podemos decir que 4 libros de un total de 9 libros, son de investigación

5-2 **[II ; (PD, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	= 9 libros totales = 5 libros de mat. = 4 " de inv. se puede decir que $\frac{4}{9}$ de los libros son de inv. y $\frac{5}{9}$ de los libros son de matematicas. Los libros de investigación son mas pocos que los libros de investigación.

5-3 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	Total = 9 libros pero: 5 – matemáticos 4 – investigación → los libros de investigación representan $\frac{4}{9}$ del total mientras los libros de matemático son el complemento de $\frac{4}{9}$ osea $\frac{5}{9}$.

5-4 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

5-5 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	tn = 9 . $9-5=4$ 5 = matemática $\frac{4}{9}$ + ... = 4, 4 = investigación. los # del libros de investigacion es total nomino el libro de matemática ⇒. $\frac{4}{9}$ 7/

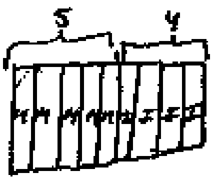
5-6 **[EPC ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	9 = T 5 m. y 4 inv. $M=\frac{5}{9}$ y $I=\frac{4}{9}$ ⇒ $\frac{4 \text{ inv.}}{5}$ ⇒ cuatro noveno es diferente q' cinco noveno.

5-7 **[EPC ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	Total de libros = 9 Matemáticas = 5 Investigación = 4 ∴ Respuesta $\frac{4}{5}$

5-8 **[D ; (PC)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	 $4 < 5$ Total 9 libros 5 → matemáticas 4 → investigación

5-9 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	El total de libro 9 # del libro de Matematica $\frac{5}{9}$ # libro de Investigación $\frac{4}{9}$ ⇒ 45 > 36 entonces quiere decir que $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$

5-10 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\frac{4}{9}$ son la proporcion de los libros de inves-tigación $\frac{5}{9}$ son la proporción de los libros de mate mática

5-11 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$\frac{5}{9} \Rightarrow$ Matemáticas $\frac{4}{9} \Rightarrow$ investigación $\frac{4}{9} \angle \frac{5}{9}$

5-12 **[II ; (V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	$M = \frac{5}{9}$ $I = \frac{4}{9}$ De que los libros de matemática es a los libros de investigación como 5 es a 4.

5-13 **[II ; (SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	que son $\frac{4}{9}$ v $\frac{4}{5}$.

5-14 **[D ; (V)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	que el # de Libros de Investigación es menor al # de Libros de Matemática.

5-15 **[EPC ; (V)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	Lo libros de ~~matematicas~~ investigación es al de matemáticas como 4 es a 5

5-16 **[IE ; (SA, DV)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	9 libros, 5 matemáticas 4 investigación  $9 = 5 + x + 4 \; x - x$ $9 = 2x + 9 - x$ $0 = x$

5-17 **[II ; (SNf, SNp)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	9 libros 5 matematica. 4 investigación. que $\frac{4}{9}$ ó 40% de libros es de investigación

5-18 **[II ; (PC, V, SNf)]**

5) En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?	Libros = 9 Matemáticas = 5 Investigación = 4  Que el número de libros de investigación representa 4/9; y es menor cantidad que el de matemáticas que representa 5/9.

A.3.6 Protocolos de Solución a la Situación Problema con Significado de Operador

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 6
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE OPERADOR
TERCER NIVEL

3-1 **[EPC ; (SA)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	~~$\frac{4}{5} + x = 35$~~ $\Rightarrow$ ~~$4 + 5x = 35 \times 5$~~ ~~$5x = 175 - 4$~~ ~~$x = \frac{171}{5}$~~ $x + \frac{4}{5} = 1$ $\therefore$ $\frac{4(35)}{5} = x$ $x = 1 - \frac{4}{5}$ $\boxed{x = \frac{1}{5}}$ $28 = x$ // 28 alumnos aprueban matemática

3-2 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$N = 35$ Aprueban Matematica. $\frac{4}{5}$ $\boxed{\text{LOS } \frac{4}{5}}$ del TOTAL. Interpretación: $\frac{4}{5} \times 35$ Aprobarón $\frac{140}{5} = 28$ 28 Alumnos //

3-3 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	35 aprueban $\frac{4}{5}$ $\frac{35 \times 4}{5} = \frac{140}{5} = 28$ aprueban 28 alumnos

3-4 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	~~35 − 4~~ $\frac{4}{5}$ de 35 alumnos $\boxed{\frac{1}{5} = 7 \text{ de } 35}$ = Aprueban 28 Alumnos

3-5 **[EPC ; (SNf, SNd, SNp)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$\cancel{35}^{7} \times \frac{4}{\cancel{5}} = 28$ alumnos. aprueban el curso de matemática 28 alumnos. $40 \mid \underline{5}$ $\quad 0.8$ * 4/5 representa al 80% de alumnos, También se puede simplificar 0.8

3-6 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$\frac{4}{5} \times 35 = 28$ → alumnos aprueban matemática

3-7 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	x: alumnos q' aprueban las matemáticas $\frac{4}{5}$ $\frac{35}{1} = \frac{4}{5} =$ $35\left(\frac{4}{5}\right) = x$ → $x = 28$ ∴ 28 alumnos aprueban matemáticas

3-8 **[EPC ; (V, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$35 \times \frac{4}{5} = 28$ ∴ 4 de 5 aprueban.

3-9 **[EPC ; (V)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	28 aprueban matemática

3-10 **[EPI ; (SNf, SNd)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	35 alumnos 4/5 aprueban Matematic. 35 x 5 = 175 | 4 ; 43.7 ⇒ 35 alumnos = $\frac{4}{5}$ q aprueban Matematic. ⇒ 43.7 = tiene el significado matematico de los 43.7 aprueban Matematica.

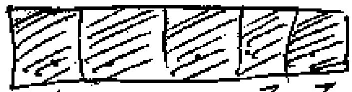
3-11 **[IE ; (SNf, SNd)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	35 alumnos $\frac{4}{5}$ 40 | 5 ; 0,8 $\frac{\frac{4}{5}}{35} = \frac{4}{175}$

3-12 [D ; (V, SNf)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	La respuesta sera de 32 alumnos 4/5 es el porcentaje del total de alumnos que tienen el curso aprovado

3-13 [II ; (PC, V, SNf)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	 7 7 7 7 7 = 35 => 4/5 = 28 alumnos ∴ Matemática aprueban 7 alumnos osea 1/5

3-14 [EPC ; (SNf)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$\cancel{35}^{7} \times \frac{4}{\cancel{5}} = 28$ del grupo de $\frac{35}{5} \times 4$

3-15 [EPC ; (V, SNf)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	total alumnos = 35 aprobados en M = $\frac{4}{5}$ • Aprueban 28 alumnos el curso de matematica. • 4/5 significa que cuatro alumnos aprueban matematica de cada cinco alumnos.

3-16 [IE ; (SNf)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$\frac{35}{1} - \frac{4}{5}$

3-17 [II ; (PC, V, SNf)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	35 → alumnos - total $\frac{4}{5}$ → ap. matematica  → esto quiere decir que de cada 5 → 4 aprueba → 32 aprueban

3-18 **[II ; (V, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	de 35 alumnos $\frac{4\times 7}{5\times 7}=\frac{28}{35}$ aprueban ⇒ se podría decir que 28 alumnos aprueban matemáticas. ⇒ que de cada 5 alumnos, 4 alumnos aprueban matemática.

3-19 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	35 alumnos Sumando 28 son de matemáticas $\frac{4}{5}$ matemáticos. o también: $35\times\frac{4}{5}=$ 140 | 5 ; 10 $\boxed{28}$; 40 $\frac{35}{5}=7$ ⇒ de 7 → 4 ; 7 → 4 ; 7 → 4 ; 7 → 4 ; 7 → 4 ; 7 → 4 ; 7 → 4 $7\times 4=28$

3-20 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	Que es: en un salón existe 35 → total. $\frac{4}{5}$ → una parte del salón que aprueba. ⇒ $(35)\frac{4}{5}=28$ alumnos aprueban matemática

3-21 **[II ; (V, SNf, SA)]**

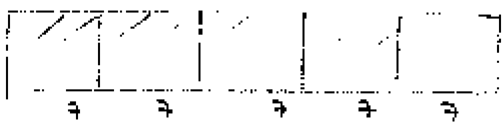
6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$\frac{4}{5}+x=35$ → $x=35-\frac{4}{5}=?$ $\frac{7}{35}$ Pero: $\frac{4}{5}=\frac{28}{35}$ Significa que la mayor. parte del salon de 35 alumnos. son los que aprueban matemáticas $\frac{28}{35}>\frac{7}{35}$

3-22 **[EPC ; (V, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$\overset{7}{\cancel{35}}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}=28$ ⇒ 28 alumnos aprueban matemática $\frac{4}{5}$ significa q' de cada 5 alumnos 4 aprueban matemática

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 6
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE OPERADOR
CUARTO NIVEL

4-1 **[II ; (PC, V, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	TOTAL = 35 ALUMNOS . . APRUEBAN = $\frac{4}{5}$ ALUMNOS . 35  7 7 7 7 7 $\Rightarrow$ 7 + 7 + 7 + 7 = 7 x 4 = 28 . DE 35 ALUMNOS APRUEBAN 28 ALUMNOS.

4-2 **[II ; (PC, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	35 |5 7 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4/5. los que aprueban matematica son 20 ~~4~~.

4-3 **[IE ; (V, SNf, SA)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	Solución 35 → 100 . 4/5 → x $x = \frac{\cancel{80}^{16}}{\cancel{35}_{7}}$ $x = \frac{16}{7}$ $\frac{16}{7} x = 35$ ojo no pueden aprobar los alumnos en una mitad porque los alumnos son variables discretas en este caso sale en decimales por lo tanto es vacío la solución o respuesta

4-4 **[IE ; (SNp)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	los 35 alumnos aprueban Matemática los $\frac{4}{5}$ quiere decir que 0.8% aprueban de los 35 alumnos.

4-5 **[IE ; (SA, SNp)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	35 alumn. aprueban mat. los 4/5 %. 35 — T 4/5 — C.P./T – El significado que se obtiene es el porcentaje de alumnos aprobados. – 35 —— 100%. 4/5 —— x. $x = \frac{100(4/5)}{35}$ $\Rightarrow x = 2,2\%$ $\Rightarrow$ aprueban el 2.2% de alumnos.

4-6 **[IE ; (SNf, SNd)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	Total = 35 alumnos $4/5$ aprueban matematicas $\frac{4}{5} = 0.8$ redondeando tenemos .. $4 — 100$ $5 — x$ $= \frac{11}{14}$ $\frac{4}{5} = \frac{4}{14}$

4-7 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	35 $35 \times \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{140}{5} = 28$

4-8 **[EPC ; (V, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$\frac{4}{5} \times 35 = \frac{140}{5} = 28$ 28 alumnos aprueban matematicas tiene el significado los $\frac{4}{5}$ q' es una parte de los 35 alumnos. y q' es una fraccion

4-9 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	total de alumnos = 35 alumnos alumnos ap.. M = $\frac{4}{5}(35)$ Aprueban M = 28 alumnos // $\frac{4}{5}$ de la cantidad total de alumnos

4-10 **[IE ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$A = 35 \Rightarrow A - M = \frac{35}{1} - \frac{4}{5} = \frac{175-4}{5} = \frac{171}{5}$ $m = 4/5$

4-11 [EPC ; (SNf)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$\frac{4}{5} \cdot 35 = 28$ alumnos pertenecen a a $\frac{4}{5}$ de salón ó alumnos ⇒ $\frac{4}{5}$ significa que 28 alumnos salvaron el curso de matemática

4-12 [II ; (PC, SNf)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	5—5—5—5—5—5—5 = 35 Alumn tomemos $= \frac{4}{5}$ $\frac{4}{5}$ vendria a ser el numero de alumnos tomados por muestra 5

4-13 [II ; (PC, SNf)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	4/5 aprueban 1/5 Desaprueba 7a 7a 7a 7 7 35 alumnos. Abrueban = 7 + 7 + 7 + 7 = 28 Alum

4-14 [EPC ; (V, SNf)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$35\left(\frac{4}{5}\right) = 28$ alumnos aprueban matematica $\frac{4}{5}$ significa de 5 alumnos 4 aprueban

4-15 [EPC ; (V)]

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	→ aprueban en la clase 28 alumnos. – nos quiere decir que hay 7 grupos de 5 alumnos – de cada 5 alumnos 4 aprueban matematica

4-16 **[EPC ; (V, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	Si el total es 35 alumnos dividimo 35 entre 5 partes iguales que es igual a 7 de los cuales tomamos 4 grupos de 7 y son 28. $\frac{35}{5} = 7 \Rightarrow 7 \times 4 = 28$

4-17 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$35 \to \Delta$ $\frac{4}{5} \to$?? $\cancel{35}\left(\frac{4}{\cancel{5}}\right) = 7(4) = 28$ Aprueban matematica? $\Rightarrow$ una Mayoria aprovarón.

4-18 **[EPC ; (V, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	• $\frac{4}{5}$ de 35 $\Rightarrow = \frac{4}{\cancel{5}} \times \overset{7}{\cancel{35}} = 28$ Rpta: 28 alumnos aprueban matemática. • $\frac{4}{5}$ representa o significa una parte.

4-19 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	Sabemos que hay 35 y aprueban Matematica 4/5 $\Longrightarrow \cancel{35}\left(\frac{4}{\cancel{5}}\right) = 7 \cdot 4 = 28$ Osea aprueban 28 alumnos

4-20 **[EPC ; (V, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$\frac{35(4)}{5} = \frac{\overset{28}{\cancel{140}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 28 \Rightarrow \frac{4}{5}$ de 35 alumnos son 28 alumnos que aprobaron Matemática matemáticamente y/o proporcionalmente se puede decir que de cada 5 alumnos 4 aprueban matemática

RESPUESTAS ORIGINALES A LA PREGUNTA Nº 6
COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE OPERADOR
QUINTO NIVEL

5-1 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	Sibumamos $35\left(\frac{4}{5}\right) = 28$ ∴ 28 alumnos apruesban matemática.

5-2 **[EPC ; (SNf, SNp)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	total = 35 alumnos $35\left(\frac{4}{5}\right) = 28$ alumnos aprueban matematicas significa que los $\frac{4}{5}$ de todos los estudiantes han aprobado y es lo mismo decir el 80%.

5-3 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	→ En un salon 35 alumnos ; → aprueban matematica $\frac{4}{5}$ ⇒ $35 \cdot \frac{4}{5} = 7 \cdot 4 = 28$ alumnos aprueban matemati → de un Total de 35 tomar los $\frac{4}{5}$.

5-4 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$35\left(\frac{4}{5}\right) = 28$

5-5 **[D ; (V)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	= n = 35 aprueban matemática 4/5 ⇒ 4 alumnos aprueban.

5-6 **[D ; (V)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	T = 35 ⇒ 7 alumnos aprueban matemática

5-7 **[EPC ; (V, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	Aprueban: $4/5\ (35) = 28$ alumnos. $4/5$ significa: cuatro partes de los cinco

5-8 **[EPI ; (V, SNf, SNd)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$35\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{7}$ $40 \mid 7$ 35 $0,571...$ 50 49 1 - Aprueban matemática los $\frac{4}{7}$ alumnos de matemática lo cuál no existe una persona siempre vale una unidad no 0,571... (no podemos partir a las personas). - La fracción significa que partimos al total de alumnos en 5 grupos iguales y tomamos 4 grupos.

5-9 **[EPC ; (V)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	Aprueban 28 alumnos, entonces $\frac{4}{5}$ significa que de 35 alumnos faltan aprobar el $\frac{1}{5}$. Tiempo

5-10 **[EPC ; (V, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	los $\frac{4}{5}$ de 35 son $\frac{4}{\cancel{5}} \cdot \cancel{35}^{7} = 28$ $\frac{4}{5}$ significa una proporcion de 35

5-11 **[EPC ; (PC, SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$35 \times \frac{4}{5} = 28$ $\cancel{\frac{35}{\frac{4}{5}} = \frac{35 \times 5}{4} = \frac{175}{4}}$ 

5-12 **[II ; (SNf, SNp)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	Alumnos = 35 Aprueban Matemática - $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{28}{35}$ Aprueban 28 alumnos. significa que aprueban el 80% del 100%

5-13 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$\frac{4}{\cancel{5}} \times \overset{7}{\cancel{35}} =$ 28 alumnos aprueban

5-14 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$35\left(\frac{4}{5}\right)$ $7 \times 4 = 28$ ∴ 28 aprueban Matemática $\frac{4}{5}$ es un porcentaje del total de alumnos

5-15 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	$4\left(\frac{35}{5}\right) = \frac{4}{5}(35) = 4(7) = \underline{28}$

5-16 **[D ; (----)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	35 alumnos — aprueban 4/5

5-17 **[EPC ; (SA)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	Utilizando la regla de 3 simple 1 — 35 4/5 — x $x = \frac{4}{5} \cdot 35$ $x = 28$ ∴ 28 alumnos aprueban.

5-18 **[EPC ; (SNf)]**

6) En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?	35 4 140 ⌊5 10 28 40 40 Aprueban: 28 alumnos.

A IV. Interpretación de Resultados

A.4.1 *Muestras de Desempeño Interpretativo de los Significados del Número Racional*
Estudiantes del tercer nivel

Código de Estudiante	**Parte todo**		**Cociente**	**Medida**	**Razón**	**Operador**	**Número de Interpretaciones correctas**
	Continuo	**Discreto**					
	Interpreta el significado ‘parte todo continuo’ del número racional.	Interpreta el significado ‘parte todo discreto’ del número racional.	Interpreta el significado como cociente del número racional.	Interpreta el número racional en cu significado de ‘medida’.	Interpreta el número racional en su significado de ‘razón’.	Identifica la fracción en su significado como ‘operador’.	
3-1	EPC	EPC	II	EPC	II	EPC	**4**
3-2	IE	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**4**
3-3	EPC	II	EPC	D	II	EPC	**3**
3-4	EPI	EPI	EPC	II	II	EPC	**2**
3-5	EPC	EPC	IE	EPC	EPC	EPC	**5**
3-6	EPC	EPI	II	EPC	II	EPC	**3**
3-7	EPC	D	II	EPI	II	EPC	**2**
3-8	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
3-9	EPC	EPC	EPI	II	II	EPC	**3**
3-10	EPC	II	EPC	EPI	EPI	EPI	**2**
3-11	EPC	EPC	II	EPI	II	IE	**2**
3-12	EPC	EPC	EPI	EPI	II	D	**2**
3-13	EPC	II	EPC	EPC	EPC	II	**4**
3-14	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
3-15	EPC	EPC	EPC	EPC	EPI	EPC	**5**
3-16	EPC	EPI	EPC	IE	II	IE	**2**
3-17	EPC	EPC	IE	EPC	II	II	**3**
3-18	EPC	EPC	EPI	EPI	II	II	**2**
3-19	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
3-20	IE	EPI	EPC	EPC	II	EPC	**3**
3-21	EPC	EPC	EPC	II	II	IE	**3**
3-22	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
Número de Interpretaciones correctas	**19**	**14**	**13**	**12**	**2**	**14**	**74**
Porcentaje	**86**	**64**	**59**	**55**	**9**	**64**	**56**

Muestra de desempeño interpretativo de los significados de número racional Estudiantes del cuarto nivel

Código de Estudiante	Parte todo		Cociente	Medida	Razón	Operador	Número de Interpretaciones correctas
	Continuo	Discreto					
	Interpreta el significado 'parte todo continuo' del número racional.	Interpreta el significado 'parte todo discreto' del número racional.	Interpreta el significado como cociente del número racional.	Interpreta el número racional en cu significado de 'medida'.	Interpreta el número racional en su significado de 'razón'.	Identifica la fracción en su significado como 'operador'.	
4-1	EPC	EPC	EPC	IE	II	II	**3**
4-2	EPC	EPC	EPC	EPC	II	II	**4**
4-3	EPC	EPC	EPC	EPI	II	IE	**3**
4-4	II	EPC	EPI	II	D	IE	**1**
4-5	EPC	EPCEPC	EPI	EPC	II	IE	**3**
4-6	EPC	EPC	EPI	II	EPC	IE	**3**
4-7	EPI	EPI	EPI	II	II	EPC	**1**
4-8	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
4-9	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
4-10	EPC	II	D	II	EPI	IE	**1**
4-11	EPI	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**4**
4-12	EPC	EPC	EPI	II	EPC	II	**3**
4-13	EPC	EPC	EPC	EPC	EPC	II	**5**
4-14	EPC	D	EPC	EPC	II	EPC	**4**
4-15	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
4-16	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
4-17	EPC	EPC	EPC	II	II	EPC	**4**
4-18	EPC	EPC	EPC	IE	II	EPC	**4**
4-19	EPC	EPC	EPC	II	II	EPC	**4**
4-20	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
Número de Interpretaciones correctas	**17**	**17**	**14**	**10**	**3**	**11**	**72**
Porcentaje	**85**	**85**	**70**	**50**	**15**	**55**	**60**

Muestra de desempeño interpretativo de los significados de número racional
Estudiantes del quinto nivel

Código de Estudiante	**Parte todo**		**Cociente**	**Medida**	**Razón**	**Operador**	**Número de Interpretaciones correctas**
	Continuo	**Discreto**					
	Interpreta el significado 'parte todo continuo' del número racional.	Interpreta el significado 'parte todo discreto' del número racional.	Interpreta el significado como cociente del número racional.	Interpreta el número racional en cu significado de 'medida'.	Interpreta el número racional en su significado de 'razón'.	Identifica la fracción en su significado como 'operador'.	
5-1	EPC	EPI	EPC	EPI	D	EPC	**3**
5-2	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
5-3	EPC	EPC	EPC	EPI	II	EPC	**4**
5-4	EPC	EPC	EPI	II	II	EPC	**3**
5-5	EPC	EPI	EPC	EPC	II	D	**3**
5-6	EPC	EPC	IE	II	EPC	D	**3**
5-7	EPC	EPC	EPI	II	EPC	EPC	**4**
5-8	EPC	EPC	EPI	II	D	EPI	**2**
5-9	EPC	EPC	D	EPI	II	EPC	**3**
5-10	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
5-11	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
5-12	EPC	EPC	EPI	EPC	II	II	**3**
5-13	EPC	EPC	IE	EPI	II	EPC	**3**
5-14	EPC	EPC	IE	EPC	D	EPC	**4**
5-15	EPC	EPC	EPC	EPC	EPC	EPC	**6**
5-16	EPI	EPC	IE	D	IE	D	**1**
5-17	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
5-18	EPC	EPC	EPC	EPC	II	EPC	**5**
Número de Interpretaciones correctas	**17**	**16**	**9**	**9**	**3**	**13**	**67**
Porcentaje	**94**	**89**	**50**	**50**	**17**	**72**	**62**

A.4.2 Tabulación de los Tipos de Representaciones en la Resolución de la Prueba

A.4.2.1 Significado Parte-Todo Continuo y sus Representaciones

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 1(Tercer Nivel)
Significado Parte-Todo de la Cantidad de Magnitud Continua

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
3-1	*	*			*			
3-2	*						*	
3-3		*						
3-4	*							
3-5		*						
3-6	*	*			*			
3-7	*	*			*			
3-8		*			*			
3-9	*	*			*			
3-10	*	*			*			
3-11		*			*			
3-12	*	*						
3-13	*	*			*			
3-14	*	*						
3-15		*			*			
3-16	*	*			*			
3-17	*	*			*			
3-18	*	*			*		*	
3-19	*	*						
3-20	*	*			*			
3-21	*	*			*			
3-22	*	*			*			
Total	17	20			15		2	
%	77	91			68		9	

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 1 (Cuarto Nivel) Significado Parte-Todo de la Cantidad de Magnitud Continua

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
4-1		*			*			
4-2	*	*			*			
4-3		*			*			
4-4	*	*			*			
4-5	*	*			*			
4-6		*			*			
4-7		*			*			
4-8		*			*			
4-9		*			*			
4-10	*	*						
4-11	*	*			*			
4-12		*			*			
4-13	*	*			*			
4-14	*	*			*			
4-15	*	*						
4-16	*	*			*			
4-17		*			*			
4-18		*			*			
4-19		*			*			
4-20	*	*			*			
Total	10	20			18			
%	50	100			90			

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 1 (Quinto Nivel) Significado Parte-Todo de la Cantidad de Magnitud Continua

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
5-1	*	*			*			
5-2		*			*			
5-3	*	*						
5-4		*						
5-5		*			*			
5-6		*			*			
5-7		*						
5-8	*	*			*			
5-9	*	*						
5-10	*	*						
5-11		*			*			
5-12	*	*						
5-13		*						
5-14		*			*			
5-15		*			*			
5-16	*	*						
5-17	*	*						
5-18		*			*			
Total	8	18			9			
%	44	100			50			

A.4.2.2 Significado Parte-Todo Discreto y sus Representaciones

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 2 (Tercer Nivel)
Significado Parte-Todo de la Cantidad de Magnitud Discreta

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
3-1		*						
3-2		*						
3-3		*						
3-4	*	*						
3-5		*						
3-6	*	*						
3-7		*		*				
3-8		*						
3-9	*	*						
3-10	*	*						
3-11	*	*						
3-12	*	*						
3-13	*	*						
3-14	*	*						
3-15		*			*			
3-16		*						
3-17		*			*			
3-18		*						
3-19	*	*						
3-20		*						
3-21		*				*		
3-22	*	*						
Total	10	22		1	2	1		
%	45	100		5	9	5		

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 2 (Cuarto Nivel) Significado Parte-Todo de la Cantidad de Magnitud Discreta

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
4-1		*						
4-2	*	*						
4-3	*	*						
4-4	*	*						
4-5	*	*				*		
4-6		*				*		
4-7		*				*		
4-8		*			*			
4-9		*				*		
4-10		*						
4-11		*						
4-12		*				*		
4-13		*			*			
4-14								
4-15		*						
4-16	*	*						
4-17		*				*		
4-18		*						
4-19		*				*		
4-20	*	*						
Total	6	19			2	7		
%	30	95			10	35		

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 2 (Quinto Nivel) Significado Parte-Todo de la Cantidad de Magnitud Discreta

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
5-1		*						
5-2		*				*		
5-3		*						
5-4		*						
5-5		*				*		
5-6		*						
5-7		*						
5-8		*						
5-9		*						
5-10	*	*						
5-11		*						
5-12		*						
5-13		*						
5-14		*						
5-15		*						
5-16		*						
5-17	*	*				*		
5-18		*			*			
Total	2	18			1	3		
%	11	100			6	17		

A.4.2.3 Significado Cociente y sus Representaciones

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 3 (Tercer Nivel) Significado Cociente

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
3-1		*		*				
3-2		*						
3-3		*						
3-4		*	*					
3-5			*					
3-6		*			*			
3-7		*			*			
3-8		*	*					
3-9		*						
3-10		*	*		*	*		
3-11		*	*		*			
3-12	*	*						
3-13	*	*	*		*	*		
3-14		*			*	*		
3-15		*	*		*			
3-16	*	*	*					
3-17	*		*					
3-18		*	*					
3-19	*	*			*			
3-20	*	*	*					
3-21		*	*		*	*		
3-22		*	*					
Total	6	20	13		9	4		
%	27	91	59		41	18		

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 3 (Cuarto Nivel) Significado Cociente

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
4-1		*			*			
4-2		*	*		*			
4-3		*	*					
4-4		*	*		*	*		
4-5	*	*			*			
4-6		*	*		*	*		
4-7		*			*	*		
4-8		*			*	*		
4-9		*	*		*	*		
4-10		*		*				
4-11		*						
4-12		*	*		*			
4-13		*			*			
4-14		*						
4-15	*	*						
4-16	*	*						
4-17	*	*	*					
4-18	*	*				*		
4-19	*	*			*	*		
4-20	*	*						
Total	7	20	7	1	11	7		
%	35	100	35	5	55	35		

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 3 Quinto Nivel Significado Cociente

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
5-1		*				*		
5-2		*	*					
5-3	*	*						
5-4		*						
5-5		*				*		
5-6	*	*	*					
5-7		*						
5-8		*						
5-9		*						
5-10	*	*						
5-11		*						
5-12	*	*						
5-13			*					
5-14	*		*					
5-15		*			*			
5-16			*			*		
5-17		*	*					
5-18		*			*			
Total	5	15	6		2	3		
%	28	83	33		11	17		

A.4.2.4 Significado de Medida y sus Representaciones

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 4 Tercer Nivel Significado de Medida

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
3-1		*						
3-2		*						
3-3								
3-4		*						
3-5		*						
3-6				*				
3-7		*						
3-8		*		*				
3-9		*			*			
3-10				*				
3-11		*						
3-12		*						
3-13		*						
3-14		*						
3-15				*				
3-16		*		*				
3-17		*		*				
3-18		*		*				
3-19	*	*						
3-20	*	*		*				
3-21		*		*				
3-22		*		*				
Total	2	18		10	1			
%	9	82		45	5			

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 4 Cuarto Nivel Significado de Medida

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
4-1		*						
4-2		*						
4-3		*		*				
4-4				*				
4-5		*						
4-6		*						
4-7					*			
4-8				*	*			
4-9				*				
4-10	*							
4-11		*		*				
4-12		*						
4-13		*		*				
4-14		*						
4-15				*				
4-16				*				
4-17		*						
4-18		*						
4-19		*						
4-20		*		*				
Total	1	13		9	2			
%	5	65		45	10			

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 4 Quinto Nivel Significado de Medida

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
5-1		*		*				
5-2		*						
5-3				*				
5-4		*						
5-5		*						
5-6		*						
5-7		*						
5-8		*						
5-9		*						
5-10		*		*				
5-11		*						
5-12		*						
5-13				*				
5-14		*						
5-15				*				
5-16								
5-17		*						
5-18		*						
Total		14		5				
%		78		28				

A.4.2.5 Significado de Razón y sus Representaciones

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 5 Tercer Nivel Significado como Razón

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
3-1		*						
3-2		*						
3-3		*						
3-4	*	*						
3-5		*						
3-6	*	*						
3-7		*						
3-8	*	*						
3-9		*						
3-10	*	*				*		
3-11	*	*						
3-12		*						
3-13	*	*			*			
3-14	*	*						
3-15	*	*			*			
3-16	*	*						
3-17	*	*			*			
3-18	*	*						
3-19	*	*						
3-20		*						
3-21	*	*			*			
3-22	*	*						
Total	14	22			4	1		
%	64	100			18	5		

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 5 Cuarto Nivel Significado como Razón

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
4-1		*						
4-2		*						
4-3		*						
4-4	*	*			*			
4-5	*	*						
4-6		*						
4-7	*	*			*			
4-8		*				*		
4-9	*	*				*		
4-10		*		*				*
4-11		*						
4-12		*			*			
4-13				*				
4-14	*	*						
4-15	*	*						
4-16	*	*				*		
4-17	*	*						
4-18		*						
4-19	*	*				*	*	
4-20	*	*						
Total	10	19		2	3	4	1	1
%	50	95		10	15	20	5	5

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 5 Quinto Nivel Significado como Razón

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
5-1	*							
5-2	*	*				*		
5-3	*	*						
5-4		*						
5-5	*	*						
5-6	*	*						
5-7		*						
5-8					*			
5-9		*						
5-10	*	*						
5-11		*						
5-12	*	*						
5-13		*						
5-14	*							
5-15	*							
5-16				*				*
5-17		*					*	
5-18	*	*			*			
Total	10	13		1	2	1	1	1
%	56	72		6	11	6	6	6

A.4.2.6 Significado Operador y sus Representaciones

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 6 Tercer Nivel Significado como Operador

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
3-1				*				
3-2		*						
3-3		*						
3-4		*						
3-5		*	*				*	
3-6		*						
3-7		*						
3-8	*	*						
3-9	*							
3-10		*	*					
3-11		*	*					
3-12	*	*						
3-13	*	*			*			
3-14		*						
3-15	*	*						
3-16		*						
3-17	*	*			*			
3-18	*	*						
3-19		*						
3-20		*						
3-21	*	*		*				
3-22	*	*						
Total	9	20	3	2	2		1	
%	41	91	14	9	9		5	

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 6 Cuarto Nivel Significado como Operador

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
4-1	*	*			*			
4-2		*			*			
4-3	*	*		*				
4-4							*	
4-5				*			*	
4-6		*	*					
4-7		*						
4-8	*	*						
4-9		*						
4-10		*						
4-11		*						
4-12		*			*			
4-13		*			*			
4-14	*	*						
4-15	*							
4-16	*	*						
4-17		*						
4-18	*	*						
4-19		*						
4-20	*	*						
Total	8	17	1	2	4		2	
%	40	85	5	10	20		10	

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 6 Quinto Nivel Significado como Operador

Cód.	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
5-1		*						
5-2		*					*	
5-3		*						
5-4		*						
5-5	*							
5-6	*							
5-7	*	*						
5-8	*	*	*					
5-9	*							
5-10	*	*						
5-11		*			*			
5-12		*					*	
5-13		*						
5-14		*						
5-15		*						
5-16								
5-17				*				
5-18		*						
Total	6	13	1	1	1		2	
%	33	72	6	6	6		11	

A.4.3 Tipos de Representaciones en la Resolución de la Prueba

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 1
Significado Parte-Todo de la Cantidad de Magnitud Continua

Año de Estudio	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
Tercero	77	91			68		9	
Cuarto	50	100			90			
Quinto	44	100			50			
Total	57	97			69		3	

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 2
Significado Parte-Todo de la Cantidad de Magnitud Discreta

Año de Estudio	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
Tercero	45	100		5	9	5		
Cuarto	30	95			10	35		
Quinto	11	100			6	17		
Total	29	98		2	8	19		

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 3
Significado Cociente

Año de Estudio	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
Tercero	27	91	59		41	18		
Cuarto	35	100	35	5	55	35		
Quinto	28	83	33		11	17		
Total	30	91	42	2	36	23		

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 4
Significado de Medida

Año de Estudio	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
Tercero	9	82		45	5			
Cuarto	5	65		45	10			
Quinto		78		28				
Total	5	75		39	5			

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 5
Significado como Razón

Año de Estudio	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
Tercero	64	100			18	5		
Cuarto	50	95		10	15	20	5	5
Quinto	56	72		6	11	6	6	6
Total	57	89		8	15	10	4	4

Tipos de Representaciones en las Respuestas a la Pregunta Nº 6
Significado como Operador

Año de Estudio	TIPO DE REPRESENTACIÓN UTILIZADA							
	Verbal **V**	Simbólica Numérica **SNf**	Simbólica Numérica **SNd**	Simbólica Algebraica **SA**	Pictórica Continua **PC**	Pictórica Discreta **PD**	Porcentaje **P**	Veen **DV**
Tercero	41	91	14	9	9		5	
Cuarto	40	85	5	10	20		10	
Quinto	33	72	6	6	6		11	
Total	38	83	8	8	12		9	